ECONnect NTNU

Faktor

- en eksamensavis utgitt av ECONnect

Eksamensbesvarelse:
SØK1004 – Statistikk for økonomer

Eksamen: Våren 2009

Antall sider: 25

Om ECONnect:

ECONnect er en frivillig studentorganisasjon for studentene på samfunnsøkonomi- og finansøkonomistudiet ved NTNU. Vi arbeider for økt faglig kompetanse blant våre studenter samt tettere kontakt med næringslivet. Det gjør vi ved å arrangere fagdager, gjesteforelesninger, bedriftspresentasjoner m.m. I dag går det ca. 200 studenter på bachelornivå (1.-3. klasse) og ca. 70 studenter på masternivå (4.-5. klasse). Studentene på masternivå er fordelt på de to linjene samfunnsøkonomi (ca. 50 stk) og finansiell økonomi (ca. 20 stk). Mer om ECONnect og aktuelle arrangementer på www.econnect-ntnu.no.

ECONnect består av følgende personer ved utgivelsestidspunkt:

Bjørn Bergholt (Leder)	bjorn@econnect-ntnu.no
Elise Caspersen (Fagdagansvarlig)	elise@econnect-ntnu.no
Pål Christian Vågbø (Bedriftansvarlig)	paal@econnect-ntnu.no
Tormod Hagerup (Økonomi/Samfunnsøk.)	tormod@econnect-ntnu.no
Tiril Toftedahl	tiril@econnect-ntnu.no
Louis Dieffenthaler	louis@econnect-ntnu.no
Tone Hedvig	tone@econnect-ntnu.no
Ole Christian Grytten	ole@econnect-ntnu.no

Post- og besøksadresse:	*Organisasjonsnummer:*	*Hjemmeside:*
ECONnect, NTNU Dragvoll Institutt for samfunnsøkonomi Bygg 7, Nivå 5 7491 Trondheim	NO 994 625 314	www.econnect-ntnu.no

Merk: Eksamensbesvarelsene har i varierende grad feil og mangler, både oppsett og innhold. De vil også kun vise en av flere mulige fremgangsmåter. ECONnect står ikke ansvarlig for selve faginnholdet.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for samfunnsøkonomi

EKSAMENSOPPGAVE I SØK1004

STATISTIKK FOR ØKONOMER

Faglig kontakt under eksamen: Bjørnar Kivedal Karlsen

Tlf.: 9 16 54

Eksamensdato: Tirsdag 2. juni 2009

Eksamenssted: Dragvoll

Eksamenstid: 4 timer

Studiepoeng: 7,5

Tillatte hjelpemidler: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler, samt godkjent kalkulator Citizen SR-270x el. HP 30S.

Sensur: 23. juni 2009.

Eksamen består av 5 oppgaver med delspørsmål som alle skal besvares.
Oppgaveteksten er skrevet på bokmål og nynorsk.

Merk! Studentene må primært gjøre seg kjent med sensur på stud.web eller ved å oppsøke sensuroppslagene. Evt telefoner om sensur må rettes til instituttet. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike telefoner.

Oppgave 1

Du skal kjøre bil fra Oslo til Trondheim en sen høstkveld, og er engstelig for dårlig vær og hvordan dette påvirker risikoen for å havne i en ulykke. Det spås fint vær, regnvær og snøvær med sannsynlighet på henholdsvis 0.60, 0.39 og 0.01. Du vet også at sannsynlighet for en bilulykke på denne strekningen er 0.001, 0.003 og 0.009 i de tre nevnte værtypene. Hva er sannsynligheten for å være involvert i en ulykke? Gitt at det skjer en ulykke, hva er sannsynligheten for at snøvær var medvirkende årsak?

Oppgave 2

Produktene som kommer til sluttkontrollen i en bedrift kan ha to typer feil:
A = ”Skjønnhetsfeil”
B = ”Funksjonsfeil”
Erfaringsmessig vet bedriften at 10% av de produserte enhetene har skjønnhetsfeil, og 8% av enhetene har funksjonsfeil. De to feiltypene opptrer uavhengig av hverandre. Vi antar dessuten at om en enhet har feil eller ikke, er uavhengig av hva som skjer med de andre enhetene.

a) Hva er sannsynligheten for at en enhet fra produksjonen har begge typer feil?
Hva er sannsynligheten for at en enhet *bare* har skjønnhetsfeil?
Vis at sannsynligheten for at en enhet er feilfri, er 0.828.

Bedriften får kr 80 for en enhet som er feilfri og kr 60 for en enhet som har bare skjønnhetsfeil. Enheter som har funksjonsfeil, kan ikke selges. Vi lar Z være prisen som bedriften får for en tilfeldig enhet.

b) Beregn $E(Z)$ og $\mathrm{Var}(Z)$.

Bedriften produserer 800 enheter på en dag. Vi lar X være antall av disse som er feilfrie.

c) Begrunn kort at X er binomisk fordelt. Finn sannsynligheten for at flere enn 650 enheter er feilfrie. Finn også $P(640<X\leq 670)$.

Oppgave 3

En sukkertøyprodusent leverer poser med lakrisbåter. Nettovekten som er angitt på posene, er 150 gram. Vi lar X være målt vekt av lakrisbåtene i en tilfeldig pose. Vi antar at X er normalfordelt med forventning μ=150 gram og standardavvik σ = 3 gram.

En kunde har mistanke om at vekten av innholdet i posene er for lav. Hun har veid 16 poser og vil på bakgrunn av disse målingene ta stilling til om hun vil påstå at innholdet i posene er for lite i forhold til den angitte nettovekten på 150 gram. Resultatene for X er som følger:

146	148	154	152	144	145	144	153	145	148	146	153	147	148	152	147

$$\bar{X} = 148.25$$

$$\sum \left(X_i - \bar{X} \right)^2 = 177$$

a) Bruk resultatene til å estimere forventningen μ og standardavviket σ.
b) Finn et 90% konfidensintervall for μ når vi antar at σ = 3 gram.

c) Utfør en test for å undersøke om posene på markedet gjennomsnittlig inneholder mindre enn 150 gram. Bruk signifikansnivå 2.5% og anta at σ = 3 gram. Hva blir konklusjonen?
d) Gjennomfør testen i oppgave c dersom du antar at σ er ukjent.
e) Regn ut teststyrken for μ=147.5 gram og μ=145 gram. Forklar med ord hva den beregnede styrken betyr. Anta at σ = 3 gram.
f) Sukkertøyprodusenten i oppgave 3 ønsker å innføre et krav om at standardavviket for vekten på godteposene skal være mindre enn 4.0 gram. Test om dette kravet er oppfylt. Bruk 2.5% signifikansnivå.

Oppgave 4

Vi har to stokastiske variabler, *X* og *Y*, med følgende simultanfordeling:

X↓ *Y*→	0	2	4
1	0.04	0.04	0.02
2	0.17	0.31	0.12
3	0.09	0.15	0.06

a) Finn de marginale sannsynlighetsfordelingene til henholdsvis *X* og *Y*.
b) Finn kovariansen til *X* og *Y*. Er variablene uavhengige? Begrunn svaret.

Oppgave 5

En 44-åring har deltatt i et mosjonsløp de siste sju årene. Anvendt tid er oppgitt i kronologisk rekkefølge i tabellen nedenfor. Tallene er uttrykt som avrundede desimaltall (43 min og 20 sek skrives altså 43.3). Det første tallet gjelder som 38-åring, og det siste tallet gjelder som 44-åring.

41.2	41.3	41.7	42.6	43.3	43.1	44.8

a) Plott dataene i et koordinatsystem. La mosjonistens alder *X* gå langs den horisontale aksen, og anvendt tid *Y* langs den vertikale aksen. Velg enheter slik at plottet blir lett leselig.

Vi antar at dataene kan beskrives med regresjonsmodellen $Y = \alpha + \beta X + e$. Dataene gir også:

$$\sum_{i=1}^{7}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = 28, \quad \sum_{i=1}^{7}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = 10, \quad \sum_{i=1}^{7}\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right) = 16$$

b) Regn ut utvalgskorrelasjonen mellom *X* og *Y*. Hva betyr korrelasjonskoeffisienten for samvariasjonen mellom *X* og *Y*?
c) Beregn estimater for de ukjente parameterne α og β som inngår i modellen. Tegn estimert regresjonslinje i samme koordinatsystem som i oppgave a.

Estimeringen gir følgende resultater:

$$\sum_{i=1}^{7}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 = 0.891, \quad \sum_{i=1}^{7}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = 10.034, \quad \sum_{i=1}^{7}\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 = 9.143$$

d) Gi en praktisk tolkning av β. Er det mulig å gi en tilsvarende praktisk tolkning av α?
e) Hvor god vil du si at modellen er?
f) Beregn et 90% konfidensintervall for β. Ville et 95% konfidensintervall vært større eller mindre enn 90%-konfidensintervallet du beregnet? Begrunn hvorfor.
g) Anta at modellen også kan brukes neste år. Hva blir forventet tid neste år?

NTNU

Kandidatnr.

Dato: 02/06/09 Side: 1

Fagnr/emnekode SØK 1004

Antall ark: 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

Oppgave 1,

Fint vær	0,6	0,001
Regn vær	0,39	0,003
snøvær	0,01	0,009

$P(\text{ulykke}) = 0{,}001 + 0{,}003 + 0{,}009$
$= \underline{\underline{0{,}013}}$

Det er 1,3 % sannsynlighet for å havne i en bilulykke.

Gitt at det skjer en ulykke (U), hva er sannsynligheten for at snøvær var medvirkende årsak?

$P(U) = 0{,}013$
$P(S = \text{snøvær}) = 0{,}01$
$P(S \cap U) = P(\text{snøvær og ulykke samtidig}) = 0{,}009$

$$P(S/U) = \frac{P(S \cap U)}{P(U)} = \frac{0{,}009}{0{,}013} = \underline{\underline{0{,}69}}$$

Det er 69 % sannsynlighet for at ulykken ble forårsaket av snøvær. (snøvær var en medvirkende faktor).

NTNU

Kandidatnr.

Dato: 02/06/09 Side: 2

Fagnr/emnekode SØK 1004

Antall ark: 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

Oppgave 2)

A = "Skjønnhetsfeil"
B = "Funksjonsfeil"

$P(A) = 10\% = 0{,}1$
$P(B) = 8\% = 0{,}08$

Feiltypene A og B er uavhengig av hverandre, dvs. at den ene hendelsen ikke påvirker sannsynligheten for at det andre skal hende.
Antar videre at om en enhet har feil, påvirker ikke dette sannsynligheten for at andre enheter har feil.

a)

Sannsynligheten for at en enhet har både A og B feil:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$= 0{,}1 \cdot 0{,}08$$
$$\underline{= 0{,}008}$$

Det er 0,8 % sannsynlighet for at en enhet har begge feilene.

NTNU

Kandidatnr.

Dato: 2/6-09 Side: 3

Fagnr/emnekode SØK 1004 Antall ark: 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

Sannsynligheten for at en enhet bare har skjønnhetsfeil:

$P(\bar{B})$: dvs sannsynligheten for at B ikke skjer.

$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}08 = \underline{0{,}92}$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}) = 0{,}1 \cdot 0{,}92 = \underline{0{,}092}$$

<u>Det er 9,2% sannsynlighet for at bare A skjer (dvs. A, men ikke B).</u>

Sannsynligheten for at en enhet er feilfri er sannsynligheten for at ikke A ($\bar{A}$) og ikke B ($\bar{B}$) hender samtidig.

$P(\bar{A}) = 1 - 0{,}1 = \underline{0{,}9}$

$P(\bar{B}) = 0{,}92$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0{,}9 \cdot 0{,}92 = \underline{0{,}828}$$

<u>Det er 82,8% sannsynlighet for at en enhet er feilfri.</u>

Tapir Uttrykk 04/09

NTNU

Kandidatnr

Dato: 2/6-09 Side: 4

Fagnr/emnekode SØK 1004

Antall ark: 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

b)

Kaller en feilfri enhet for C.

$P(C) = 0,828$

Dersom bedriften selger varene sine får den

80 kr. for C

60 kr. for A

B kan ikke selges (ser dermed bort fra den).

Vet at Z er prisen som bedriften får for en tilfeldig valgt enhet.

E(Z) er forventningsverdien til Z. Dvs. hvor mye forventer vi at prisen på ~~to~~ en tilfeldig vare vil være når vi har to ulike utfall (kan ~~enten~~ trekke ut en tilfeldig enhet som har feil eller en som er feilfri).

Forventningsverdien kalles også middelverdien og gir gjennomsnittlig pris (her) når vi trekker ut mange enheter.

$$E(X) = \sum x \cdot p(x)$$
$$= \sum z \cdot p(z)$$

$$E(z) = 80 \cdot 0,828 + 60 \cdot 0,1$$
$$= \underline{72,24}$$

Tapir Uttrykk 04/09

NTNU

Kandidatnr.

Dato: 2/6-09 Side: 5

Fagnr/emnekode: SØK 1004 Antall ark: 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

$E(Z) = \mu_z = \underline{\underline{72,24}}$

dvs. at vi forventer en pris på 72,24 kr.

$Var(Z)$ gir variansen til prisen, dvs. et uttrykk for spredningsmålet.

$Var(Z) = \sum_x x^2 (p(x)) - \mu_x^2$

$= \sum_z z^2 p(z) - \mu_z^2$

$\sum_z z^2 p(z) = 80^2 \cdot 0,828 + 60^2 \cdot 0,1$
$= \underline{5659,2}$

$Var(Z) = \sum_z z^2 p(z) - \mu_z^2$
$= 5659,2 - (72,24)^2$
$= 5659,2 - 5218,62$
$= \underline{\underline{440,6}}$

Variansen er 440,6.
Dette kan brukes til å finne standardavvik ($\sqrt{Var(Z)}$) som gir faktisk spredningsmål. Dvs. gjennomsnittlig avvik fra middelverdien.

g) Enheter produsert $= n = 800$

$E(Z) = \mu = 72{,}24$

$Var(Z) = \sigma_x^2 = 440{,}6$

Std. avvik $= \sigma_z = 21$

X - antall feilfrie enheter

X er binomisk fordelt fordi det er en sekvens med uavhengige (oppgitt) bernoulliforsøk. Bernoulliforsøk er et tilfeldig eksperiment med kun to utfall (suksess eller fiasko). Ettersom X er antall feilfrie, vil det "motsatte" være antall enheter med feil (her går både A og B sammen).

Benytter normalfordelingen til å finne en tilnærming av binominalsannsynligheten:

X - antall feilfrie enheter (dvs. suksess)

$n = 800$

$\pi =$ sannsynligheten for suksess (X) i hvert forsøk $= 0{,}828$ (fra oppg. 2a)

Krav for å bruke denne tilnærmingen:

$n\pi > 5$ og $n(1-\pi) > 5$

$800 \cdot 0{,}828 = 662{,}4 > 5$
$800 \cdot (1-0{,}828) = 137{,}6 > 5$

Dette gir at X er normalfordelt med $\mu = n\pi = 662{,}4$ og $Var(x) = \sigma^2 = 137{,}6$.

$X \sim N(662{,}4, 137{,}6)$

Tester om vi kan benytte korreksjonsfaktor (dvs. utvide intervallet med 0,5 i hver retning).
Krav:

$$5 < n\pi(1-\pi) < 9$$

$n\pi(1-\pi) = 662{,}4 \cdot 0{,}172 = 113{,}93$

Benytter ikke korreksjonsfaktor.

$P(x > 650)$

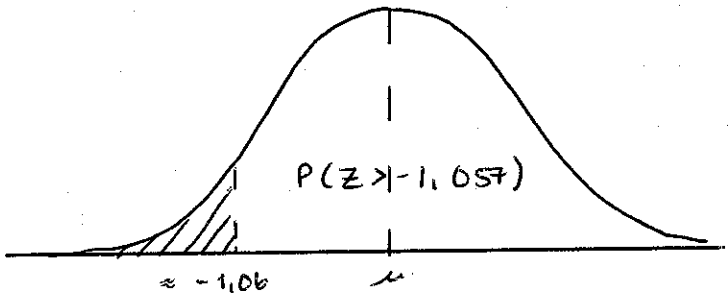
$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{650-\mu}{\sigma}\right)$

Har at $\frac{X-\mu}{\sigma} = Z$.

$P\left(Z > \frac{650-662{,}4}{\sqrt{137{,}6}}\right)$

$P(Z > -1{,}057)$

Benytter kumulativ standardnormalfordelingstabell:



$$P(Z > -1{,}057) = 1 - F(-1{,}057)$$
$$= 1 - F(-1{,}06)$$
$$= 1 - 0{,}1446$$
$$= \underline{0{,}8554}$$

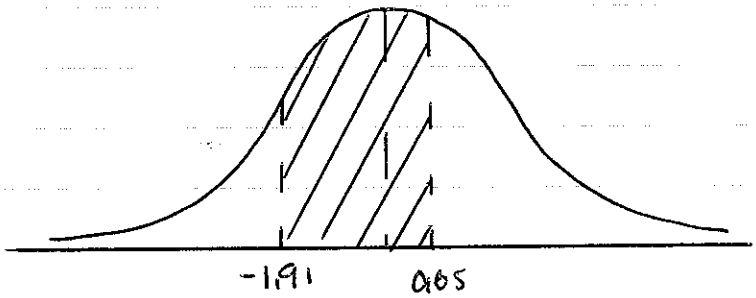
Det er 85,54 % sannsynlighet for at X er større enn 650 enheter.

$P(640 < X \leq 670)$

$$P\left(\frac{640-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{670-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P\left(\frac{640-662{,}4}{\sqrt{1376}} < Z \leq \frac{670-662{,}4}{\sqrt{1376}}\right)$$

$P(-1{,}91 < Z \leq 0{,}65)$



$$P(-1{,}91 < Z \leq 0{,}65) = \cancel{F(-1{,}91) - F(0{,}6}$$
$$= F(0{,}65) - F(-1{,}91)$$
$$= 0{,}7422 - 0{,}0281$$
$$= \underline{0{,}7141}$$

Det er 71,41 % sannsynlighet for at X er mellom 640 og 670 enheter.

NTNU

Kandidatnr.

Dato: 2/6-09 Side: 10

Fagnr/emnekode SØK 1004

Antall ark: 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

Oppgave 3)

X er normalfordelt
der X viser målt vekt

$\mu = 150$

$\sigma = 3$

utvalg:

$n = 16$

$\bar{X} = 148{,}25$

$\Sigma (X_i - \bar{X})^2 = 177$

a) Antar at jeg skal bruke resultatene fra målingene til å finne μ og σ for utvalget:

$\mu = E(\bar{X}) = \cancel{E(}$

$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

$= (146 + 148 + 154 + 152 + 144 + 145 + 144 + 153 + 145 + 148 + 146 + 153 + 147 + 148 + 152 + 147) \cdot \frac{1}{16}$

$= 2372 \cdot \frac{1}{16}$

$= \underline{148{,}25}$

ser at $E(\bar{X}) = \mu$

Dvs. at gjennomsnittet for utvalget er forventningsrett.

NTNU

Kandidatnr.

Dato: 2/6-09 Side: 11

Fagnr/emnekode SØK 1004

Antall ark: 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

~~i forhold til populasjonen.~~

For å finne et forventningsrett standardavvik benytte s:

$$s^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Her oppgitt $\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 177$

$$s^2 = \frac{177}{15} = 11{,}8$$

$$s = \sqrt{11{,}8} = \underline{3{,}435}$$

$\underline{\underline{\mu = 148{,}25 \text{ og } \sigma = s = 3{,}44}}$

b) Konfidensintervall:

Ettersom n er liten og vi må estimere s^2, benytter jeg t-fordeling. Får da følgende konfidensintervall:

$$\bar{x} \pm t(16-1)_{0{,}1/2} \cdot \frac{3}{\sqrt{16}}$$

$$148{,}25 \pm 1{,}753 \cdot 0{,}75$$

$$148{,}25 \pm 1{,}315$$

$\rightarrow \underline{[146{,}935 \text{ – } 149{,}565]}$

NTNU

Kandidatnr.

Dato: 2/6-09 Side: 12

Fagnr/emnekode SØK 1004

Antall ark: 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

μ vil med 90% sikkerhet ligge innenfor dette intervallet.

g) Hypotesetest: $H_0: \mu = 150$

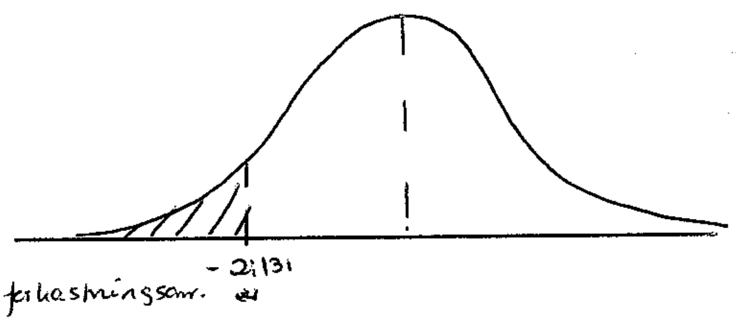
$H_A: \mu < 150$ (ensidig test).

Sign. nivå $= \alpha = 0{,}025$

Kritisk verdi: $t(n-1)_\alpha = t(15)_{0{,}025} = 2{,}131$
(pga. $\mu < 150$ vil vi ha kritisk verdi lik $-2{,}131$).

Forkast H_0 når $TS < -2{,}131$.

$TS = \dfrac{\bar{X} - \mu}{3/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ dersom vi har at H_0 gjelder.



$TS = \dfrac{148{,}25 - 150}{3/\sqrt{16}} = \underline{-2{,}33}$

Ser at $TS = -2{,}33 < -2{,}131$. Dvs. at vi forkaster

Tapir Uttrykk 04/09

NTNU

Kandidatnr.

Dato: 2/6-09 Side: 13

Fagnr/emnekode SØK 1004

Antall ark: 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

Ho med 2,5% sannsynlighet for å ta feil.
Det ser ut som om posene på markedet
i gjennomsnitt inneholder mindre enn 150 gr.
Dette underbygges også av konfidensintervallet,
ettersom $\mu = 150$ ikke inngår der med 90 %
sikkerhet.

d) Dersom σ er ukjent benyttes s.
Benytter t-fordelingen, men har $s = 3{,}44$
istedenfor $\sigma = 3$.

$H_0: \mu = 150$
$H_A: \mu < 150$

Forkaster Ho dersom $TS < -2{,}131$.

$$TS = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{148{,}25 - 150}{3{,}44/\sqrt{16}} = -2{,}03.$$

Ser at $TS = -2{,}03 > -2{,}131$.
Dvs. at vi ikke kan forkaste Ho.
Det ser ikke ut til at populasjonsgjennomsnittet
er mindre enn 150 utifra dette utvalget.

NTNU

Kandidatnr.

Dato: 2/6-09 Side: 14

Fagnr/emnekode SØK 1004

Antall ark: 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

e) Teststyrken viser sannsynligheten for at vi har tatt riktig avgjørelse.

P(forkaste H_0 / H_A er sann)

~~= 1~~

Vet at vi forkaster H_0 dersom TS < − 2,131.

$$P(\text{forkaste } H_0 / H_A \text{ er sann}) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < -2{,}131 \;/\; \frac{\bar{X}-\mu^*}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)\right)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu-\mu^*}{\sigma/\sqrt{n}} < -2{,}131 - \frac{\mu^*}{\sigma/\sqrt{n}} \;/\; \frac{X-\mu^*}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)\right)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu^*}{\sigma/\sqrt{n}} < -2{,}131 - \frac{\mu^*+\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \;/\; \frac{X-\mu^*}{\sigma/\sqrt{n}} N(0,1)\right)$$

$$= P\left(Z < -2{,}131 + \frac{150-\mu^*}{0{,}75}\right)$$

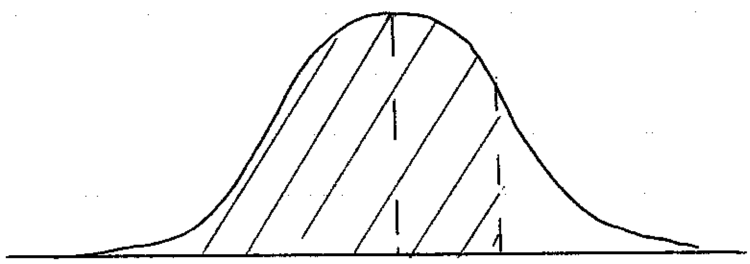
Der μ^* er den riktige μ (dvs. H_A er rett).

Har at:

i) $\mu^* = 147{,}5$

$$\text{Teststyrken} = P\left(Z < -2{,}131 + \frac{150-147{,}5}{0{,}75}\right)$$

$$= P(Z < 1{,}20)$$



$P(Z < 1{,}20) = F(1{,}20) = \underline{0{,}8849}$

Den gule kopien beholder du

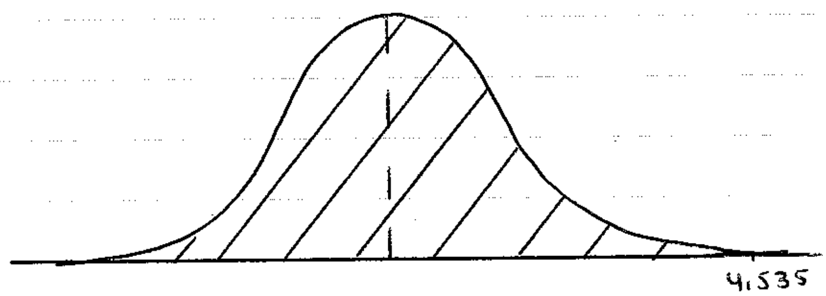
Tapir Uttrykk 04/09

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

Dette betyr at vi har 88,5% sannsynlighet for å forkaste Ho når HA er rett (dvs. gjøre riktig).

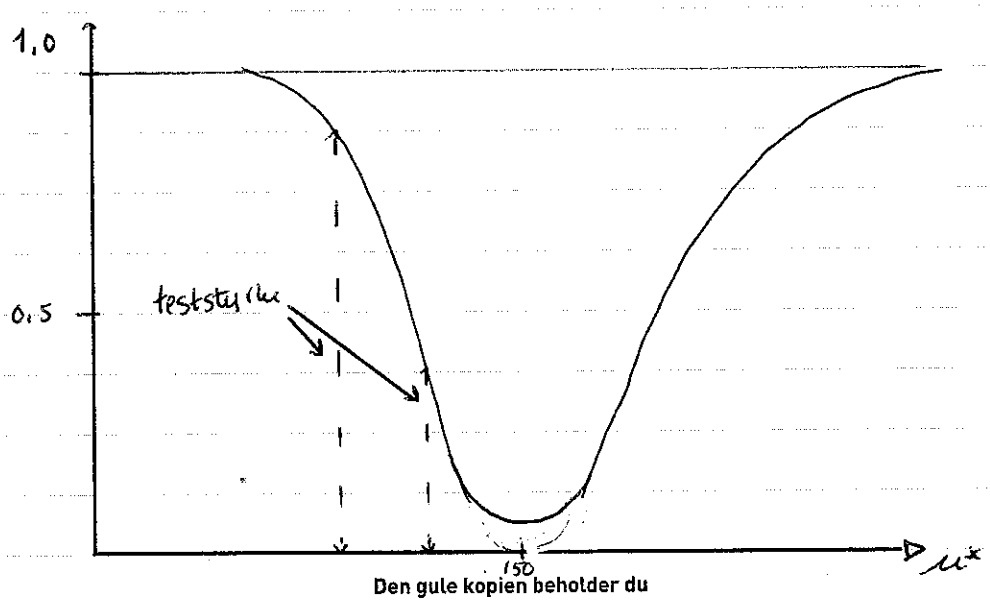
11) $\mu^* = 145$

$$\text{Teststyrken} = P\left(Z < -2{,}131 + \frac{150-145}{0{,}75}\right)$$
$$= P(Z < 4{,}535)$$



$$P(Z < 4{,}535) = F(4{,}535)$$
$$\approx 1$$

Det er 100% sannsynlighet for å forkaste Ho når den egentlige $\mu^* = 145$.



NTNU

Kandidatnr.

Dato: 2/6-09 Side: 16

Fagnr/emnekode SØK 1004

Antall ark: 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

Ser av fig. at teststyrken (sannsynligheten for å velge riktig) øker jo lenger unna μ^* (den egentlige μ) kommer fra den antatte μ (her = 150).

Dette stemmer med resultatet fra oppgaven der vi ser at $\mu^* = 145$ har en større teststyrke enn $\mu^* = 147{,}5$.

f) Skal teste hvorvidt standardavviket (σ) er mindre enn 4; dvs om variansen σ^2 er mindre enn 16:

Hypotese: $H_0: \sigma^2 = 16$

$H_A: \sigma^2 < 16$ (ensidig test)

Benytter kjikvadratfordelingen:
Under H_0 er

$$TS = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2$$

Har sign.nivå $\alpha = 0{,}025$
Benytter kjikvadratfordelingen og finner kritisk verdi. Ettersom vi har $H_A <$, vil vi få:

$$\cancel{\chi^2_{0{,}025}(16-1) = 27}$$

$$\chi^2_{1-0{,}025}(16-1) = \chi^2_{0{,}975}(15) = 6{,}262$$

Den gule kopien beholder du

Tapir Uttrykk 04/09

NTNU

Kandidatnr.

Dato: 2/6-09 Side: 17.

Fagnr/emnekode SØK 1004 Antall ark: 35

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

Dvs. at vi forkaster H_0 dersom TS er mindre enn kritisk verdi: $TS < 6{,}262$.

$$TS = \frac{s^2(n-1)}{\sigma^2} = \frac{(3{,}44)^2 \cdot 15}{3^2}$$

$$= \frac{177{,}5}{9} = \underline{19{,}72}$$

Ser at $TS = 19{,}72 > 6{,}262$.
Dvs. at vi beholder H_0. Fra utvalget kan det se ut som om standardavviket er 4.

Den gule kopien beholder du

Tapir Uttrykk 04/09

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

Oppgave 4)

a)

$X \downarrow \; Y \rightarrow$	0	2	4	f(x)
1	0,04	0,04	0,02	0,1
2	0,17	0,31	0,12	0,6
3	0,09	0,15	0,06	0,3
g(y)	0,3	0,5	0,2	1

b) Kovarians er et mål på lineær sammenheng mellom variablene X og Y.
Dersom kovariansen er negativ vil sannsynligvis en høy verdi på X henge sammen med en lav verdi på Y.
Dersom kovariansen er positiv vil vi sannsynligvis ha en høy verdi på Y sammen med en høy verdi på X.

Dersom variablene er uavhengig har vi at kovariansen er null. Det kommer av at

$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$ for alle verdier av X og Y.

$Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y$

$E(XY) = \sum_x \sum_y x \cdot y \cdot p(x,y)$

$= 1 \cdot 0 \cdot 0{,}04 + 1 \cdot 2 \cdot 0{,}04 + 1 \cdot 4 \cdot 0{,}02 + 2 \cdot 0 \cdot 0{,}17 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}31 +$

$2 \cdot 4 \cdot 0{,}12 + 3 \cdot 0 \cdot 0{,}09 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}15 + 3 \cdot 4 \cdot 0{,}06$

$= \cancel{3{,}36}$ $3{,}98$

$$\mu_x = E(x) = \sum_x x \cdot f(x)$$
$$= 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot 0{,}3$$
$$= \underline{2{,}2}$$

$$\mu_y = E(y) = \sum_y y \cdot g(y)$$
$$= 0 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}2$$
$$= \underline{1{,}8}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - \mu_x \mu_y$$
$$= 3{,}98 - (2{,}2 \cdot 1{,}8)$$
$$= 3{,}98 - 3{,}96$$
$$= \underline{0{,}02}$$

Vi har ikke uavhengige variabler ettersom $E(X) \cdot E(Y) \neq E(XY)$, og $\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0$.

Ser at det er en positiv sammenheng mellom X og Y.

NTNU

Kandidatnr.

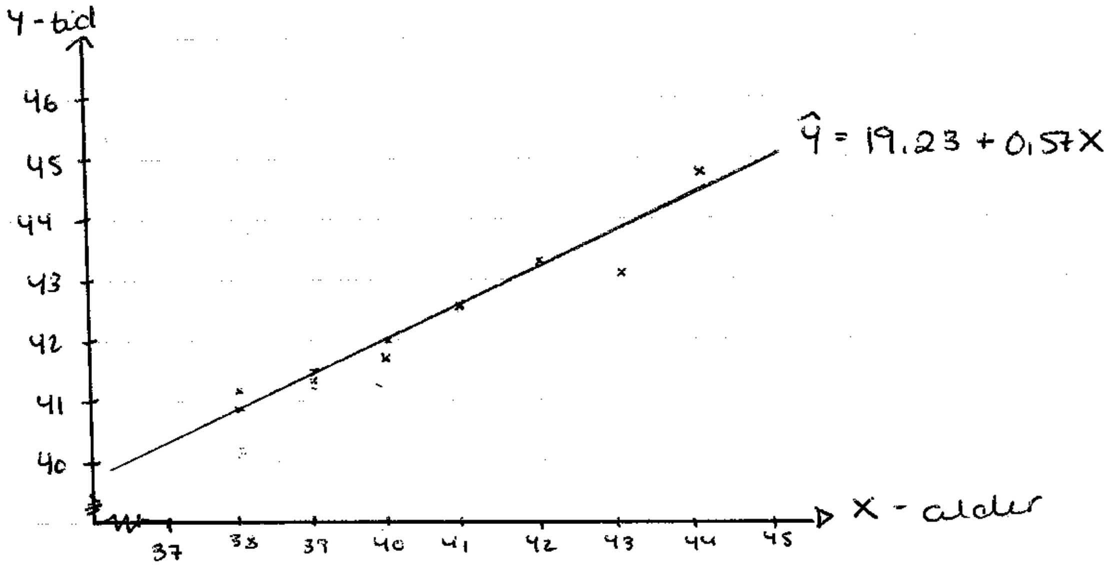
Dato: 2/6-09 Side: 20

Fagnr/emnekode SØK 1004 Antall ark: 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

Oppgave 5)

x	38	39	40	41	42	43	44
y	41,2	41,3	41,7	42,6	43,3	43,1	44,8



b) Antar at dataene kan beskrives med : $y = \alpha + \beta X + \varepsilon$

$$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2 = 28 \;,\; \sum_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2 = 10 \;,\; \sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = 16$$

utvalgskorrelasjonen R gis ved :

$$R = \frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum(y_i-\bar{y})^2}}$$

$$= \frac{16}{\sqrt{28}\cdot\sqrt{10}} = \frac{16}{16{,}73} \approx \underline{0{,}96}$$

Tapir Uttrykk 04/09

NTNU

Kandidatnr.

Dato: 2/6-09 Side: 21

Fagnr/emnekode SØK 1004 Antall ark: 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

Utvalgskorrelasjon = 0,96 sier at det er en sterk, positiv samvariansjon mellom 44-åringens alder og anvendt tid på løpene. Dette stemmer godt med plottene i diagrammet. Dvs. at jo høyere alder han får (blir eldre), jo lengre tid bruker han på løpet, X og Y stiger sammen.

g Benytter minstekvadratsmetode (OLS):

$$\hat{\beta} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \frac{16}{28} = \underline{0{,}57}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} \div \hat{\beta}\bar{x}$$

Finner $\bar{y}$ og $\bar{x}$:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{7} y}{n} \approx \underline{42{,}6}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} x}{n} = \underline{41}$$

$$\hat{\alpha} = 42{,}6 \div 0{,}57 \cdot 41$$

$$= \underline{19{,}23}$$

Får følgende estimerte regresjonslinje:

$$\hat{y} = 19{,}23 + 0{,}57x + \varepsilon$$

Den gule kopien beholder du

Tapir Uttrykk 04/09

Setter opp en tabell og tegner inn linjer i diagrammet:

X	38	39	40	41	42	43	44
$\hat{y} = 19.23 + 0.57x$	40,89	41,46	42,03	42,6	43,17	43,74	44,31

Ved å benytte OLS-metode finner jeg den linjen som passer best til spredningsplottet.
Det skjer ved å minimere Σe^2, dvs. minimere de kvadrerte avvikene fra plottene vi har oppgitt.

Denne estimeringen gir:

$\sum_{i=1}^{7}(y_i - \hat{y}_i)^2 = 0{,}891$, $\sum_{i=1}^{7}(y_i - \bar{y})^2 = 10{,}034$, $\sum_{i=1}^{7}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = 9{,}143$

d) β er stigningstallet og gir "sammenhengen" mellom X og Y. Dersom $\beta > 0$ stiger Y med X, mens dersom $\beta < 0$ synker Y når X øker.

α gir skjæringspunktet med Y aksen.
Dersom $X = 0$, vil $Y = \alpha$.

I dette tilfellet ser vi at $\beta > 0$, og vi har en positiv sammenheng mellom X og Y.
Ettersom $\beta = 0{,}57$ vil Y øke med 0,57 når X øker med 1 enhet.

α er her 19,23. Det vil si at når $X = 0$ er $Y = 19{,}23$. Dette viser at modellen ikke kan

NTNU

Kandidatnr.

Dato: 2/6-09 Side: 23

Fagnr/emnekode SØK 1004

Antall ark: 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

benyttes for alle X. Det er tydelig at linjen vi fant er optimal for spredningsplottet, men antakelig ikke for resten (alle andre X-verdier).

e) For å si noe om hvor god modellen er benyttes R-kvadrat (R^2).
Denne viser hvor stor del av plottene den estimerte regresjonslinjen fanger opp.

Dersom:
$R^2 = 0$ har vi en svært dårlig modell, den fanger opp 0 %.
$R^2 = 90$ har vi en perfekt modell som fanger opp 100 % av plottene.

$$R^2 = \frac{SSE}{SST}$$

SSE gir forklart variasjon $= \sum_{i=1}^{7} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = 9{,}143$
SST gir total variasjon $= \sum_{i=1}^{7} (y_i - \bar{y})^2 = 10{,}034$

$$R^2 = \frac{9{,}143}{10{,}034} = \underline{0{,}91}$$

Ser at dette er en god modell (regresjonslinjen fanger opp 91 % av dataene/plottene).
Den klarer å forklare 91 % av variasjonene.

Den gule kopien beholder du

Tapir Uttrykk 04/09

f) Skal beregne et 90% konfidensintervall for β:
$\rightarrow \alpha = 0,1$

$\hat{\beta} \pm t_{\alpha/2} \cdot s_{\hat{\beta}}$

$s_{\hat{\beta}}$ er standard feil til $\hat{\beta}$. For å finne dette benyttes:

$$s^2_{\hat{\beta}} = \frac{s^2}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}$$

$$s^2 = \frac{\Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2} = \frac{0,891}{5} = 0,1782$$

$$s^2_{\hat{\beta}} = \frac{0,1782}{28} = 0,0064$$

$$s_{\hat{\beta}} = \sqrt{0,0064} = \underline{0,08}$$

Dette gir:

$$0,57 \pm t(7-2)_{0,1/2} \cdot 0,08$$

$$0,57 \pm 2,015 \cdot 0,08$$

$$0,57 \pm 0,1612$$

$$\underline{[0,4088 , 0,7312]}$$

NTNU

Kandidatnr.

Dato: 2/6-09 Side: 25

Fagnr/emnekode SØK 1004

Antall ark: 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

Dette gir den virkelige β med 90% sikkerhet.
Dvs. at β ligger mellom 0,4088 og 0,7312
med 90% sikkerhet.

Dersom vi istedet hadde benyttet et 95% konfidensintervall ville intervallet vært større enn det for 90%. Det er fordi prosentandelen høyner, vi må dermed utvide intervallet for å kunne fange opp en større sikkerhet.
Dvs. at for å øke sikkerheten for at β ligger i intervallet, må vi utvide intervallet.
Dvs. at jo større/sikrere %-vis konfidensintervall jo større må selve intervallet være.

9) Antar at modellen også brukes neste år.
Da er $X = 45$.
Setter dette inn i $\hat{Y} = 19{,}23 + 0{,}57X$

$\hat{Y} = 19{,}23 + 0{,}57 \cdot 45$
$= \underline{44{,}88}$

Forventer at mannen vil løpe på 44,88,
dvs. <u>44,53 minutter</u>