NTNU – Trondheim
Norwegian University of
Science and Technology

Department of Economics

Examination paper for FIN3005 – Asset Pricing

Academic contact during examination: Gunnar Bårdsen

Phone: 73 59 19 38

Examination date: 16.12.2015

Examination time (from-to): 4 hours (09.00–13.00)

Censorship date: 16.01.2016

Permitted examination support material: C / Formelsamling: Knut Sydsæter, Arne Strøm og Peter Berck (2006): Matematisk formelsamling for økonomer, 4utg. Gyldendal akademiske. Knut Sydsæter, Arne Strøm, og Peter Berck (2005): Economists' mathematical manual, Berlin.
Calculator: Casio fx-82ES PLUS, Citizen SR-270x, SR-270X College or HP 30S.

Language: English

Number of pages (front page excluded): 1

Number of pages enclosed: 0

Exam in FIN3005 Asset Pricing (Fall 2015)

Make the assumptions you find necessary.

Problem 1 (50%) An option matures at time $T > t$. The option has two underlying assets, stock 1 and stock 2. The time t prices of the two stocks are S_t^1 and S_t^2, respectively. The stocks do not pay dividends. The option is a special type of call option and has an exercise price of X. At time T when the option matures, the owner of the option can choose if he wants stock 1 or stock 2 to be the underlying asset.

a) Write down the payoff (value) π_T of the option at the time it matures.

b) Use the Martingale approach to find the time t value (π_t) of the option. (When we in class found an expression for the value of a call option, we found that $Q(S_T > X) = N(d_2)$. You are not expected to find the corresponding d-functions here. Stop when you have something similar to $Q(\cdot)$.)

c) Assume now that you would like to estimate the value of the option by using Monte Carlo simulations. To reduce the standard error of the price estimate, you decide to use a control variate. Show how you can estimate the value of the option when you use a call option written on stock 1 as a control variate.

Problem 2 (50%) A representative agent has utility from consumption $u(c) = \ln c$. He will consume at time t and $t+1$. There are two possible states at time $t+1$, s_1 and s_2. He has a subjective discount factor β. At time t he has an income y_0 and at time $t+1$ he has a state dependent income $y(s)$. Let $y(s_1) = y_1$ and $y(s_2) = y_2$. Let further $pc(s)$ be the state price for state s. The two state prices $pc(s_1) = pc_1$ and $pc(s_2) = pc_2$ are known at time t. Also the probabilities for state s_1 (π_1) and for state s_2 (π_2) are known. The corresponding discount factors are m_1 and m_2.

a) Find the optimal consumption c_0 at time t and express it in terms of y_0, y_1, y_2, pc_1, pc_2, and β.

b) Find the optimal consumption c_1 in state s_1 and express it in terms of y_0, y_1, y_2, pc_1, pc_2, m_1, and β.

c) Find the optimal consumption c_2 in state s_2 and express it in terms of y_0, y_1, y_2, pc_1, pc_2, m_2, and β.

Comments on exam for candidate 10041 FIN3005 Asset Pricing, Fall 2015

April 6, 2016

Problem 1)

a) This way of writing the final payoff is equivalent to the one suggested in the solution to the exam.

b) The candidate demonstrates a good understanding of how to apply the martingale approach for valuing exotic options. Although the final answer does not match the suggested solution, the candidate receives a high score on this problem. (Note that the last expression in the suggested solution misses the exercise price X.)

c) Here the candidate shows how the call option can be used as a control variate in the simulations. He does not say how we can impose correlation between the returns on the two underlying assets, but this is only a minor issue.

Problem 2 This problem turned out to be difficult for many students, particularly the formulation of the problem. The candidate successfully formulates and solves the optimization problem. Nothing more to say!

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Oppgave 1

a) Vi har her egentlig to kjøpsopsjoner, der vi velger den som gir høyest payoff i tidspunkt T. Payoffen er

$$\Pi_T = \max\left(\left(\max(S_T^1 - x, 0)\right), \max(S_T^2 - x, 0)\right)$$

b) Finner først verdien av de to kjøpsopsjonene på tidspunkt t. Utregningene vil være identiske, så ser på S^i, $i = 1, 2$. C_t^i er verdien av kjøpsopsjonen på tidspunkt t.

$$\frac{C_t^i}{B_t} = E_t^Q\left(\frac{\max(S_T^i - x, 0)}{B_T}\right)$$

$$\Rightarrow C_t^i = B_t E_t^Q\left(\left(\frac{S_T^i - x}{B_T}\right) \cdot 1_A\right)$$

der $1_A = 1$ hvis $S_T^i > x$

$$\Rightarrow C_t^i = B_t E_t^Q\left(\frac{S_T^i}{B_T} \cdot 1_A\right) - B_t E_t^Q\left(\frac{x \cdot 1_A}{B_T}\right)$$

$$\Rightarrow C_t^i = B_t E_t^Q\left(\frac{S_T^i}{B_T} \cdot 1_A\right) - B_t x E_t^Q\left(\frac{1_A}{B_T}\right)$$

Endrer ~~Bytter~~ ~~probabilitet~~ numeraire og sannsynlighets measure

$$\Rightarrow C_t^i = S_t^i E_t^{Q^{S^i}}(1_A) - x B_T^{-1} B_t E_t^Q(1_A)$$

Vi får da at

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10041

Dato/*Date:* 16/12-15 Side/*Page:* 2

Emnekode/*Subject* FIN 3005 Antall ark/*Number of pages:* 10

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

$$c_t^i = S_t^i Q^{S^i}(A) - xe^{-r(T-t)} Q(A)$$

Vi har da antatt at $B_T = e^{rT}$. Dette er prisen av en vanlig call på tidspunkt t. Videre må vi ta hensyn til sannsynligheten for at $S_T^1 > S_T^2$ og motsatt. Sette at $1_B = 1$ hvis $B: S_T^1 > S_T^2$. Det vil si at $(1 - 1_B) = 1$ hvis $S_T^2 \geq S_T^1$.

Vi ser at Π_t er gitt ved

$$\frac{\Pi_t}{B_t} = E_t^Q\left(\frac{\max(S_T^1 - x, 0)\cdot 1_B + \max(S_T^2 - x, 0)\cdot(1-1_B)}{B_T}\right)$$
$$= E_t^Q\left(\left(\frac{S_T^1 \cdot 1_{A_1}}{B_T} - \frac{x\cdot 1_A}{B_T}\right)1_B + \left(\frac{S_T^2\cdot 1_{A_2}}{B_T} - \frac{x\cdot 1_{A_2}}{B_T}\right)(1-1_B)\right)$$

Vi ser da at vi får $E_t^Q(1_{A_1}\cdot 1_B)$ dette kan skrives som $Q(A_1 \cap B)$ som er sannsynligheten for at A_1 og B intreffer. Vi har her at $A_1: S_T^1 > x$ og $A_2: S_T^2 > x$. Fra utregningen ovenfor har vi nå

$$\Pi_t = S_t^1 Q^{S^1}(A_1\cap B) - xe^{-r(T-t)}Q(A_1\cap B) + S_t^2 Q^{S^2}(A_2) - xe^{-r(T-t)}Q(A_2)$$
$$- S_t^2 Q^{S^2}(A_2\cap B) + Q(A_2\cap B)\, xe^{-rT}$$
$$= S_t^1 Q^{S^1}(A_1\cap B) - xe^{-r(T-t)}Q(A_1\cap B) + S_t^2\left(Q^{S^2}(A_2) - Q^{S^2}(A_2\cap B)\right)$$
$$- xe^{-r(T-t)}\left(Q(A_2) - Q(A_2\cap B)\right)$$

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10041

Dato/*Date:* 16/12 - 15 Side/*Page:* 3

Emnekode/*Subject* FIN 3005 Antall ark/*Number of pages:* 10

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

c) Når vi skal benytte control variate for å redusere standardfeilen ved Monte Carlo simuleringer må vi ha en variabel som vi kjenner forventningen til, i dette tilfellet kjøpsopsjonen på aksje 1 og vi må ha at ~~cov~~ kovariansen mellom variabelen som brukes som control variate og ~~verd~~ aktivet vi ønsker å estimere ikke er null.

Vi bruker at

$$E(x) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - b(y_i - E(y))$$

Her er x opsjonen vi ønsker å estimere og y er kjøpsopsjonen på aksje 1. Vi må nå estimere verdien av aksjene (1 og 2) på tidspunkt T. For så å finne verdien av opsjonene x og y på tidspunkt T og deretter diskontere med $e^{-r(T-t)}$ for å finne verdien ~~i dag~~ på tidspunkt t. Gjør dette mange ganger og tar snittet for å finne en verdi av opsjon Π_t. Vi har da

$$E(\Pi_t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(e^{-r(T-t)}\Pi_T - b(e^{-r(T-t)}C_T) - E(c))$$

der ~~Ez~~ c er opsjonen på aksjen c. Vi finner Π_T og C_T ved å benytte payoff formlene i a) og b). Det som gjenstår da er å finne S_T^i

Den gule kopien beholder du/*Please keep the yellow page*

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

Dette kan gjøres ved å benytte sammenhengen

$$S_T^i = S_t^i e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_i^2)(T-t) + \sigma_i Z_T^i}$$

og sette at $Z_T \sim \sqrt{T-t}\,\varepsilon$, der $\varepsilon \sim N(0,1)$.
Dette gir

$$S_T^i = S_t^i e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_i^2)(T-t) + \sigma_i \sqrt{T-t}\,\varepsilon}$$

Fra dette kan vi finne Π_i og C_T og da videre Π_t.

~~For å finne~~ For å få de estimatene som har lavest standardfeil, må vi finne b som minimerer variansen til estimatene. Vi finner den optimale b-en:

$$\begin{aligned}
var(\cdot) &= var\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - b(q_i - E(q_i))\right) \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} var(x_i - b(q_i - E(q_i))) \\
&= \frac{1}{N}\left(var(x) + b^2 var(q) - 2b\rho\sigma_x\sigma_q\right) \\
&= \frac{1}{N}\underbrace{\left(\sigma_x^2 + b^2\sigma_q^2 - b2\rho\sigma_x\sigma_q\right)}_{H(b)}
\end{aligned}$$

Finner b som minimerer $H(b)$.

FOB

$$\frac{\partial H(b)}{\partial b} = 2b\sigma_q^2 - 2\rho\sigma_x\sigma_q = 0 \Rightarrow b^* = \frac{\rho\sigma_x\sigma_q}{\sigma_q^2} = \frac{\rho\sigma_x}{\sigma_q}$$

Hvis vi setter dette inn igjen så får vi at

$$var(\cdot) = \frac{1}{N}\left(\sigma_x^2(1-\rho^2)\right)$$

Som er lavere enn variansen til estimatoren med Monte Carlo uten noe variansreduksjonsteknikk, som er $\frac{1}{N} var(x)$, så lenge $\rho \neq 0$.

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10041

Dato/*Date:* 16/12-15 Side/*Page:* 6

Emnekode/*Subject* FIN 3005

Antall ark/*Number of pages:* 10

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Oppgave 2

a) Vi ønsker å finne optimalt konsum på tidspunkt t. Dette gjør vi ved å starte med å maksimere nyttene

$$\max \quad u(c_0) + \sum_s \beta\pi(s)u(c(s))$$

$$\text{s.t} \quad c_0 + \sum_s pc(s)c(s) = y_0 + \sum_s pc(s)y(s)$$

Former Langrange-funksjonen

$$\mathcal{L} = u(c_0) + \sum_s \beta\pi(s)u(c(s)) - \lambda\left(c_0 + \sum_s pc(s)c(s) - y_0 - \sum_s pc(s)y(s)\right)$$

FOB

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_0} = u'(c_0) - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = u'(c_0) \quad (1)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c(s)} = \beta\pi(s)u'(c(s)) - \lambda pc(s) = 0 \qquad s = 1,2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda} \quad c_0 + \sum_s pc(s)c(s) = y_0 + \sum_s pc(s)y(s) \quad (3)$$

I vårt tilfelle er ~~s=2~~ det to tilstander. Setter inn for (1) i (2) og skilder mellom de to tilstandene

~~$\beta\pi(s$~~

$$\beta\pi_1 u'(c_1) = u'(c_0)pc_1$$

$$\Rightarrow pc_1 = \beta\pi_1 \frac{u'(c_1)}{u'(c_0)}$$

NTNU

Kandidat nr./Candidate no. 10041

Dato/Date: 16/12-15 Side/Page: 7

Emnekode/Subject FIN 3005

Antall ark/Number of pages: 10

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Vi lar også at

$$u(c) = \ln c \Rightarrow u'(c) = \frac{1}{c}$$

Dette gir

$$pc_1 = \beta\pi_1 \cdot \frac{\frac{1}{c_1}}{\frac{1}{c_0}}$$

$$= \beta\pi_1 \cdot \frac{c_0}{c_1}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{\beta\pi_1 c_0}{pc_1}$$

Vi får det samme for tilstand 2

$$c_2 = \frac{\beta\pi_2 c_0}{pc_2}$$

Setter inn for dette i (3)

$$c_0 + pc_1\left(\frac{\beta\pi_1 c_0}{pc_1}\right) + pc_2\left(\frac{\beta\pi_2 c_0}{pc_2}\right) = y_0 + pc_1 y_1 + pc_2 y_2$$

$$\Rightarrow c_0 + \beta\pi_1 c_0 + \beta\pi_2 c_0 = y_0 + pc_1 y_1 + pc_2 y_2$$

$$\Rightarrow c_0(1 + \beta\underbrace{(\pi_1 + \pi_2)}_{=1}) = y_0 + pc_1 y_1 + pc_2 y_2$$

$$\Rightarrow c_0 = \frac{y_0 + pc_1 y_1 + pc_2 y_2}{1 + \beta}$$

Vi ser at økning i y_0, y_1, y_2 vil føre til økning i c_0, dette virker logisk, da høyere inntekt vil gi høyere konsum. Hvis β øker (blir mindre utålmodig), reduseres konsum i t, siden vi da

Kandidat nr./*Candidate no.* 10041

Dato/*Date:* 10/12-15 Side/*Page:* 8

Emnekode/*Subject* FIN 3005 Antall ark/*Number of pages:* 10

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

vil konsumere mer på tidspunkt t+1. En økning i pc vil også øke konsum i ~~a~~ t fordi det da blir dyrere å kjøpe et beløpet kun som gir 1 i t+1.

Fagtrykk Trondheim AS 12.2015

b) Vi kan finne optimalt konsum i s_1 ved å ~~s_1~~ sette inn for c_0 i uttrykket for c_1. Dette gir

$$c_1 = \frac{\beta \pi_1 c_0}{pc_1} = \frac{\beta \pi_1 \left(\frac{q_0 + q_1 pc_1 + q_2 pc_2}{1+\beta} \right)}{pc_1} \Big/ \cdot \frac{1+\beta}{1+\beta}$$

$$= \frac{\beta \pi_1 (q_0 + q_1 pc_1 + q_2 pc_2)}{pc_1 (1+\beta)}$$

Vi vet at $m_1 = \frac{pc_1}{\pi_1}$ vi ganger derfor brøken med:

$$\frac{\frac{1}{\pi_1}}{\frac{1}{\pi_1}}$$

og får

$$c_1 = \frac{\beta (q_0 + q_1 pc_1 + q_2 pc_2)}{m_1 (1+\beta)}$$

c) Vi får helt lik utregning som i b, så

$$c_2 = \frac{\beta (q_0 + q_1 pc_1 + q_2 pc_2)}{m_2 (1+\beta)}$$

Vi ser først at økning i inntekt vil gi økt konsum i s_1 og s_2. Vi ser også at økt pc_1 vil øke konsum i s_2 og økt pc_2 vil øke konsum i s_1. Vi vet at m er lav i "good states", vi ser at dette fører til høyt konsum hvis m er lav og lavt konsum hvis m er høy. Ser så på endringen i c_i av endring i β $(i = 1, 2)$

$$\frac{\partial c_i}{\partial \beta} = \frac{m_i(\varphi_0 + \varphi_i pc_i + \varphi_2 pc_2)}{(m_i(1+\beta))^2} > 0$$

Dette er også logisk, siden økning i β er det samme som lavere utålmodighet, så de konsumerer mer i $t+1$.

Til slutt ser vi på endringen i c_i ved en endring i pc_i. Vi ser ~~at~~ på s_1 først

$$\frac{\partial c_1}{\partial pc_1} = \frac{\beta\varphi_1 \cdot \frac{pc_1}{\pi_1}(1+\beta) - \beta(\varphi_0 + \varphi_1 pc_1 + \varphi_2 pc_2)\frac{1}{\pi_1}(1+\beta)}{(m_1(1+\beta))^2}$$

$$= \frac{\beta\varphi_1 pc_1(1+\beta) - \beta\varphi_0(1+\beta) - \beta\varphi_1 pc_1(1+\beta) - \beta\varphi_2 pc_2(1+\beta)}{\pi_1(m_1(1+\beta))^2}$$

$$= \frac{-\beta(1+\beta)(\varphi_0 + \varphi_2 pc_2)}{\pi_1(m_1(1+\beta))^2} < 0$$

Økning i pc_i gir redusert konsum, c_i, i s_i for $i = 1,2$. Dette er også logisk siden det blir dyrere og kjøpe konsum i s_i.