NTNU
Det skapende universitet

Institutt for samfunnsøkonomi

Eksamensoppgave i FIN3006 – Anvendt tidsserieøkonometri

Faglig kontakt under eksamen: Bjarne Strøm

Tlf.: 73 59 19 33

Eksamensdato:	13. desember 2013
Eksamenstid (fra-til):	6 timer (09.00–15.00)
Sensurdato:	13. januar 2014

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C /Flg formelsamling: Knut Sydsæter, Arne Strøm og Peter Berck (2006): Matematisk formelsamling for økonomer, 4utg. Gyldendal akademiske. Knut Sydsæter, Arne Strøm, og Peter Berck (2005): Economists' mathematical manual, Berlin.
Enkel kalkulator Citizen SR-270x, HP 30S eller SR-270X College

Annen informasjon: Eksamensoppgaven består av 5 oppgaver med delspørsmål som alle skal besvares. Vekting ved sensur gitt i parentes.

Målform/språk:	Bokmål, nynorsk og engelsk
Antall sider oppgavetekst:	7
Antall sider vedlegg:	4

Bokmål

<u>Oppgave 1</u> (20%)

La markedet for et produkt være gitt som

$$\begin{aligned} d_t &= a - \gamma p_t, \quad \gamma > 0 \\ s_t &= b + \beta p_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \beta > 0 \\ s_t &= d_t, \end{aligned}$$

der d_t og s_t er hhv. etterspørsel og tilbud i periode t, og p_t er markedsprisen i periode t. ε_t er et stokastisk tilbudssjokk med gjennomsnitt lik null. Vi har dessuten at $a > b > 0$.

a) Finn likevektspris og -kvantum.

b) Vis at en kan utlede en førsteordens differenslikning for determinering av p_t fra disse likningene.

c) Finn den generelle løsningen for differenslikningen for p_t.

d) Diskuter likevektsvilkåret.

<u>Oppgave 2</u> (20%)

Betrakt differenslikningene (behandle de to som uavhengige av hverandre, dette er **ikke** et system av likninger!)

$$\begin{aligned} &(i)\ a(L)\,y_t = \beta(L)\,x_t \quad \text{der } a(L) = 1 - 0.1L \text{ og } \beta(L) = 0.5 \\ &(ii)\ \mathrm{y}_t = 0.2\mathrm{y}_{t-1} + 0.3\mathrm{y}_{t-2} + 0.5\mathrm{x}_t + 0.7\mathrm{x}_{t-1} + 0.2\mathrm{x}_{t-2} + 0.3\mathrm{x}_{t-3} \end{aligned}$$

a) Er likningene stabile?

b) Finn likevektsløsningen for begge (dersom den eksisterer).

c) Finn og tolk de 3 første dynamiske multiplikatorene for begge.

d) Finn og tolk de 3 første interimmultiplikatorene for begge.

e) Finn og tolk de standardiserte versjonene av svarene i c) og d).

<u>Oppgave 3</u> (20%)

a) Forklar hvordan en kan modellere volatilitetsklumping som ofte blir observert i finansielle data. Forklar også hvordan en kan ta hensyn til muligheten for at «dårlige nyheter» har sterkere virkning på volatiliteten enn «gode nyheter».
b) Hvorfor er GARCH(1,1) regnet for å være en sparsommelig modell for volatilitetsklumping?

c) Vis at GARCH(1,1) modellen kan tolkes som en likevektskorrigersingsmodell (EqCM)
d) Hvordan kan en teste for om det er nødvendig også å modellere betinget volatilitet i en regresjonsmodell?

Oppgave 4 (25%)

Du blir presentert følgende resultat for en 3-mnds-rente $(r3m)$ og en 10-års-rente $(r10y)$:

(1)
$$\Delta r3m_t = \underset{(0.035)}{0.058} - \underset{(0.069)}{0.013}\, r3m_{t-1} + \underset{(0.062)}{0.24}\,\Delta r3m_{t-1} + \underset{(0.064)}{0.12}\,\Delta r3m_{t-2} + \underset{(0.062)}{0.16}\,\Delta r3m_{t-3}$$
$$\chi^2(9) = 17.41$$

(2)
$$\Delta r10y_t = \underset{(0.075)}{0.096} - \underset{(0.012)}{0.017}\, r10y_{t-1} + \underset{(0.063)}{0.087}\,\Delta r10y_{t-1} + \underset{(0.063)}{0.086}\,\Delta r10y_{t-2} + \underset{(0.063)}{0.027}\,\Delta r10y_{t-3}$$
$$\chi^2(9) = 7.60$$

(3)
$$r3m_t = -\underset{(0.056)}{0.23} + \underset{(0.01)}{0.98}\, r10y_t$$

(4)
$$u_t = r3m_t - r3m_t$$

(5)
$$\Delta u_t = \underset{(0.0092)}{0.0015} - \underset{(0.029)}{0.1}\, u_{t-1}$$
$$\chi^2(12) = 9.88$$

(6)
$$\Delta r3m_t = \underset{(0.0075)}{0.00048} - \underset{(0.029)}{0.11}\, u_{t-1} + \underset{(0.029)}{0.65}\,\Delta r10y_t + \underset{(0.032)}{0.04}\,\Delta r10y_{t-1} + \underset{(0.031)}{0.051}\,\Delta r10y_{t-2}$$
$$\chi^2(12) = 15.31$$

Likningene (1), (2), (3), (5) og (6) er alle estimerte ved bruk av OLS på et månedlig datasett med totalt 254 observasjoner. Standardfeilene er rapportert i parentes, mens teststatistikken (kji-kvadrat-fordelt) for Ljung-Box- (*OxMetrics: Portmanteau*) testen for regresjonsresidualene er rapportert for likningene (1), (2), (5) og (6).

a) Gi en detaljert tolking av resultatene.
b) Vis hvordan likning (6) er utledet.

Oppgave 5 (15%)

Forklar ulikhetene mellom prognoser basert på en MA(4) og en AR(4) prosess. Illustrer ved å utlede prognoser for $s = 1, 2, 3, 4, 5$ perioder fremover.

Nynorsk

<u>Oppgåve 1</u> (20%)

Lat marknaden for eit produkt vere gjeven som

$$d_t = a - \gamma p_t, \quad \gamma > 0$$
$$s_t = b + \beta p_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \beta > 0$$
$$s_t = d_t,$$

Der d_t og s_t er hhv. etterspurnad og tilbod i periode t, og p_t er marknadsprisen i periode t. ε_t er eit stokastisk tilbodssjokk med gjennomsnitt lik null. Vi har dessutan at $a > b > 0$.

a) Finn jamvektspris og -kvantum.

b) Vis at ein kan utleie ei førsteordens differenslikning for determinering av p_t frå desse likningane.

c) Finn den generelle løysinga for differenslikninga for p_t.

d) Diskuter jamvektsvilkåret.

<u>Oppgåve 2</u> (20%)

Betrakt differenslikningane (handsam dei som uavhengige av kvarandre, dette er **ikkje** eit system av likningar!)

$$(i)\; a(L)\, y_t = \beta(L)\, x_t \quad \text{der}\, a(L) = 1 - 0.1L \text{ og } \beta(L) = 0.5$$
$$(ii)\; \mathrm{y}_t = 0.2\mathrm{y}_{t-1} + 0.3\mathrm{y}_{t-2} + 0.5\mathrm{x}_t + 0.7\mathrm{x}_{t-1} + 0.2\mathrm{x}_{t-2} + 0.3\mathrm{x}_{t-3}$$

a) Er likningane stabile?

b) Finn jamvektsløysinga for begge (dersom ei slik eksisterar).

c) Finn og tolk dei 3 første dynamiske multiplikatorane for begge.

d) Finn og tolk dei 3 første interimmultiplikatorane for begge.

e) Finn og tolk dei standardiserte versjonane av svara i c) og d).

<u>Oppgåve 3</u> (20%)

a) Forklar korleis ein kan modellere volatilitetsklumping som ofte vert observert i finansielle data. Forklar òg korleis ein kan ta omsyn til moglegheiten for at «dårlege nyhender» har sterkare verknad på volatiliteten enn «gode nyhender».
b) Kvifor er GARCH(1,1) reikna for å vere ein sparsommeleg modell for volatilitetsklumping?

c) Vis at GARCH(1,1) modellen kan tolkast som ein jamvektskorrigerinsmodell (EqCM)
d) Korleis kan ein teste for om det er naudsynt å òg modellere betinga volatilitet i ein regresjonsmodell?

Oppgåve 4 (25%)

Du vert presentert følgjande resultat for ei 3-mnds- rente $(r3m)$ og ei 10-års-rente $(r10y)$:

(1)
$$\Delta r3m_t = \underset{(0.035)}{0.058} - \underset{(0.069)}{0.013}\, r3m_{t-1} + \underset{(0.062)}{0.24}\, \Delta r3m_{t-1} + \underset{(0.064)}{0.12}\, \Delta r3m_{t-2} + \underset{(0.062)}{0.16}\, \Delta r3m_{t-3}$$
$$\chi^2(9) = 17.41$$

(2)
$$\Delta r10y_t = \underset{(0.075)}{0.096} - \underset{(0.012)}{0.017}\, r10y_{t-1} + \underset{(0.063)}{0.087}\, \Delta r10y_{t-1} + \underset{(0.063)}{0.086}\, \Delta r10y_{t-2} + \underset{(0.063)}{0.027}\, \Delta r10y_{t-3}$$
$$\chi^2(9) = 7.60$$

(3)
$$r3m_t = -\underset{(0.056)}{0.23} + \underset{(0.01)}{0.98}\, r10y_t$$

(4)
$$u_t = r3m_t - r3m_t$$

(5)
$$\Delta u_t = \underset{(0.0092)}{0.0015} - \underset{(0.029)}{0.1}\, u_{t-1}$$
$$\chi^2(12) = 9.88$$

(6)
$$\Delta r3m_t = \underset{(0.0075)}{0.00048} - \underset{(0.029)}{0.11}\, u_{t-1} + \underset{(0.029)}{0.65}\, \Delta r10y_t + \underset{(0.032)}{0.04}\, \Delta r10y_{t-1} + \underset{(0.031)}{0.051}\, \Delta r10y_{t-2}$$
$$\chi^2(12) = 15.31$$

Likningane (1), (2), (3), (5) og (6) er alle estimerte ved bruk av OLS på eit månadleg datasett med totalt 254 observasjonar. Standardfeila er rapporterte i parantes, medan teststatistikken (kji-kvadrat-fordelt) for Ljung-Box (OxMetrics: Portmanteau) testen for regresjonsresidualane er rapporterte for likningane (1), (2), (5) og (6).

a) Gje ei detaljert tolking av resultata.

b) Vis korleis likning (6) er utleia.

Oppgåve 5 (15%)

Forklar ulikskapane mellom prognosar basert på ein MA(4) og ein AR(4) prosess. Illustrer ved å Utleie prognosar for $s = 1, 2, 3, 4, 5$ periodar framover.

English

Question 1 (20%)

Let the market for a product be represented by

$$d_t = a - \gamma p_t, \quad \gamma > 0$$
$$s_t = b + \beta p_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \beta > 0$$
$$s_t = d_t,$$

where d_t and s_t are respectively demand and supply in period t, and p_t is the market price in period t. ε_t is a stochastic supply shock with mean zero. We also have that $a > b > 0$.

a) Find the equilibrium price and quantity.

b) Show that one can derive a first order difference equation to determine p_t from these equations.

c) Find the general solution to the difference equation for p_t.

d) Discuss the stability condition.

Question 2 (20%)

Consider the difference equations (treat them independently of each other; this is **not** a system of equations!)

$$(i)\ a(L)\, y_t = \beta(L)\, x_t \quad \text{where } a(L) = 1 - 0.1L \text{ and } \beta(L) = 0.5$$
$$(ii)\ \mathrm{y}_t = 0.2\mathrm{y}_{t-1} + 0.3\mathrm{y}_{t-2} + 0.5\mathrm{x}_t + 0.7\mathrm{x}_{t-1} + 0.2\mathrm{x}_{t-2} + 0.3\mathrm{x}_{t-3}$$

a) Are the equations stable?

b) Find the equilibrium solution for both (if this exists).

c) Find and interpret the 3 first dynamic multipliers for both.

d) Find and interpret the 3 first interim multipliers for both.

e) Find and interpret the standardized versions of your answers in c) and d)

Question 3 (20%)

a) Explain how it is possible to model the volatility clustering often observed in financial data. Also explain how you could account for the possibility that "bad news" have a stronger impact on volatility than "good news".
b) Why is the GARCH(1,1) model considered a parsimonious model of volatility clustering?
c) Show that the GARCH(1,1) model can be interpreted as an equilibrium correction model.
d) How would you test for the need to also model conditional volatility in a regression model?

Question 4 (25%)

You are presented with the following estimations involving a 3-month interest rate $(r3m)$ and a 10-year interest rate $(r10y)$:

(1)
$$\Delta r3m_t = \underset{(0.035)}{0.058} - \underset{(0.069)}{0.013}\, r3m_{t-1} + \underset{(0.062)}{0.24}\,\Delta r3m_{t-1} + \underset{(0.064)}{0.12}\,\Delta r3m_{t-2} + \underset{(0.062)}{0.16}\,\Delta r3m_{t-3}$$
$$\chi^2(9) = 17.41$$

(2)
$$\Delta r10y_t = \underset{(0.075)}{0.096} - \underset{(0.012)}{0.017}\, r10y_{t-1} + \underset{(0.063)}{0.087}\,\Delta r10y_{t-1} + \underset{(0.063)}{0.086}\,\Delta r10y_{t-2} + \underset{(0.063)}{0.027}\,\Delta r10y_{t-3}$$
$$\chi^2(9) = 7.60$$

(3)
$$r3m_t = -\underset{(0.056)}{0.23} + \underset{(0.01)}{0.98}\, r10y_t$$

(4)
$$u_t = r3m_t - r3m_t$$

(5)
$$\Delta u_t = \underset{(0.0092)}{0.0015} - \underset{(0.029)}{0.1}\, u_{t-1}$$
$$\chi^2(12) = 9.88$$

(6)
$$\Delta r3m_t = \underset{(0.0075)}{0.00048} - \underset{(0.029)}{0.11}\, u_{t-1} + \underset{(0.029)}{0.65}\,\Delta r10y_t + \underset{(0.032)}{0.04}\,\Delta r10y_{t-1} + \underset{(0.031)}{0.051}\,\Delta r10y_{t-2}$$
$$\chi^2(12) = 15.31$$

Equations (1), (2), (3), (5) and (6) are all estimated by OLS using a monthly dataset containing 254 observations. Standard errors are reported in parenthesis, while chi-square test statistics for the Ljung-Box (Portmanteau) test of the regression residuals are reported for equations (1), (2), (5) and (6).

a) Give a detailed interpretation of the estimation results.
b) Show how equation (6) is derived.

Question 5 (15%)

Explain the differences between forecasting with an $MA(4)$ and an $AR(4)$ processes. Illustrate by deriving forecast for 1-5 periods ahead.

Kort kommentar til eksamensbesvarelse i *FIN3006 – Anvendt tidsserieøkonometri* høsten 2013 for kandidatnummer 10000.

Kandidatnummer 10000 fikk karakter **A**

Eksamensbesvarelsen fremstår som grundig og gir et godt helhetsinntrykk av kandidatens forståelse. Kandidaten viser at han/hun har forstått de sentrale egenskapene ved metodene og modellene det spørres om i eksamensoppgaven.

Kandidaten trekkes for noen småfeil i oppgave 1, men denne var det svært få av kandidatene som fikk helt korrekt. Kandidaten får dermed nær full uttelling. I oppgave 2 supplerer kandidaten utregningene med forklaringer til svarene, noe som alltid trekker opp. Også oppgave 3 er godt besvart, med mye god intuisjon og forklaringer av de sentrale egenskapene ved ARCH/GARCH. Oppgave 4 er jevnt over godt besvart, selv om det trekkes noe for rot med kritiske verdier og hypoteser ved stasjonæritetstesting.

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10000

Dato/*Date:* 18.12.13 Side/*Page:* 1

Emnekode/*Subject* FIN 3006 Antall ark/*Number of pages:* 38

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Oppgave 1

a) I likevekten skal etterspørsel være lik tilbud:

$$d_t = s_t$$

Setter inn i ligningene (1) og (2) i (3):

$$a - \gamma p_t = b + \beta p_{t-1} + \varepsilon_t$$

I likevekt vil vi sette inn p^*

$$a - \gamma p^* = b + \beta p^* + \varepsilon_t$$

$$a - b = (\gamma + \beta) p^* + \varepsilon_t$$

vi antar også at i likevekten er støyvariabelen lik 0 og

$$p^* = \frac{(a-b)}{\gamma+\beta}$$

: likevektsprisen

Finner likevektskvantum ved å sette inn p^* i én av ligningene, for eksempel, etterspørselen d_t:

$$d_t = a - \gamma p_t \Rightarrow d^* = a - \gamma p^* = a - \gamma \cdot \frac{(a-b)}{\gamma+\beta}$$

$$\Rightarrow d^* = \frac{a(\gamma+\beta) - \gamma(a-b)}{\gamma+\beta} = \frac{\cancel{a\gamma} + \beta a - \cancel{\gamma a} + \gamma b}{\gamma+\beta} = \frac{a\beta + \gamma b}{\gamma+\beta}$$

$$\Rightarrow d^* = s^* = \frac{\beta a + \gamma b}{\gamma+\beta}$$

: likevektsmengde

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10 000

Dato/*Date:* 13.12.13 Side/*Page:* 2

Emnekode/*Subject* FIN 8006 Antall ark/*Number of pages:* 38

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

b/ Disse likningene gir oss et system hvor vi kan sette (1/=2) og dermed utlede en førsteordens differenslikning for p_t:

$$a - \gamma p_t = b + \beta p_{t-1} + \epsilon_t$$

$$+\gamma p_t = a - b - \beta p_{t-1} - \epsilon_t$$

$$p_t = \frac{a-b}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} p_{t-1} - \frac{\epsilon_t}{\gamma}$$

$$\Rightarrow \quad p_t = \beta_0 + \beta_1 p_{t-1} + u_t$$

hvor $\beta_0 = \frac{a-b}{\gamma}$ $\quad \beta_1 = -\frac{\beta}{\gamma}$ $\quad u_t = -\frac{1}{\gamma} \cdot \epsilon_t$

c/ Den generelle løsningen:

1. Først finner vi den homogene løsningen: (setter alle konstantene lik 0):

$$p_t - \beta_1 p_{t-1} = 0$$

$$p_t^h = A \beta_1^t = A\left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)^t$$

2. den partikulære løsningen:

$$p_t - \beta_1 p_{t-1} = \beta_0 + u_t$$

$$(1 - \beta_1 L) p_t = \beta_0 + u_t$$

$$p_t = \frac{\beta_0 + u_t}{1 - \beta_1 . L}$$

$$p_t^p = \frac{\beta_0 + u_t}{1 - \beta_1}$$

siden lagoperatoren ikke har noe effekt på konstanten (og β_1 er en konstant)

$$p_t^p = \frac{\beta_0 + u_t}{1 - \beta_1} = \frac{\frac{a-b}{\gamma} - \frac{\epsilon_t}{\gamma}}{1 - \left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)} = \frac{a - b - \epsilon_t}{\gamma + \beta}$$

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

den generelle løsningen er:

$$p_t = A\left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)^t + \frac{a-b-ct}{\gamma+\beta}$$

$$p_t = A\left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)^t + \frac{a-b}{\gamma+\beta} - \frac{ct}{\gamma+\beta}$$

d)

- Vi kan diskutere $\frac{a-b}{\gamma+\beta}$

$a > b$ er $a-b>0$

$$\frac{a-b}{\gamma+\beta} \geq 0$$

$$a > \frac{b}{\gamma+\beta}$$

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10000

Dato/*Date:* 13.12.13 Side/*Page:* 4

Emnekode/*Subject* ÅW 3006 Antall ark/*Number of pages:* 38

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Oppgave 2

i)

$\alpha(L)y_t = \beta(L)x_t$ der $\alpha(L) = 1-0,1L$

$\beta(L) = 0,5$

$y_t = 0,1y_{t-1} + 0,5x_t$

a) stabilitet:

nødvendig betingelse: $\sum_{i=1}^{p} a_i < 1$

her: $0,1 < 1$ ok

tilstrekkelig betingelse: $\sum |a_i| < 1$

$|0,1| < 1 \Rightarrow$ OK

$\Rightarrow$ likningen er stabil

ii) $y_t = 0,2y_{t-1} + 0,3y_{t-2} + 0,5x_t + 0,7x_{t-1} + 0,1x_{t-2} + 0,3x_{t-3}$

nødvendig betingelse: $\sum_{i=1}^{p} a_i < 1$

$\sum a_i = 0,2 + 0,3 = 0,5 < 1$ ok

tilstrekkelig betingelse: $\sum |a_i| = 0,5 < 1$ ok

$\Rightarrow$ likning (ii) er stabil

b) Likevektsløsningen:

$\bar{y} = w^* \bar{x}$ hvor $w^* = \frac{\beta(1)}{\alpha(1)}$

$w^* = \frac{0,5}{1-0,1} = 5/9$

$\bar{y} = 5/9 \bar{x}$

Fagtrykk Trondheim AS 11.2012

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10000

Dato/*Date:* 13.12.13 Side/*Page:* 5

Emnekode/*Subject* FIN 3006 Antall ark/*Number of pages:* 38

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

i) $y_t = 0{,}2y_{t-1} + 0{,}3y_{t-2} + 0{,}5x_t + 0{,}7x_{t-1} + 0{,}2x_{t-2} + 0{,}3x_{t-3}$

i likevekten:

$$\bar{y} = w^* \bar{x}$$

$$\text{hvor } w' = \frac{\beta(1)}{\alpha(1)} = \frac{0{,}5+0{,}7+0{,}2+0{,}3}{1-0{,}2-0{,}3} = 3{,}4$$

$$\underline{\underline{\bar{y} = 3{,}4\bar{x}}}$$

e) Finn og tolk de 3 første dynamiske multiplikatorene

$$\alpha(L)\, y_t = \beta(L)\, x_t$$

$$y_t = \alpha^{-1}(L)\cdot\beta(L)\, x_t \quad = w(L)\, x_t$$

$$\text{setter } \alpha^{-1}(L) = \delta(L) \Rightarrow \quad \delta(L)\cdot\alpha(L) = 1$$

$$w(L) = \delta(L)\cdot\beta(L)$$

1. finner $\delta(L)$:

$$(\delta_0 + \delta_1 L + \delta_2 L^2 + \delta_3 L^3)\cdot(1 - 0{,}1L) = 1 + 0L + 0L^2 + 0L^3 + \dots$$

L^0: $\underline{\delta_0 = 1}$

L^1: $-0{,}1\delta_0 + \delta_1 = 0 \quad \Rightarrow \underline{\delta_1 = 0{,}1}$

L^2: $-0{,}1\delta_1 + \delta_2 = 0 \quad \delta_2 = 0{,}01$

L^3: $-0{,}1\delta_2 + \delta_3 = 0 \quad \Rightarrow \delta_3 = 0{,}001$ osv.

2. $w(L) = \delta(L)\cdot\beta(L)$

$\Rightarrow$ ~~$w(L) = (1 + 0{,}1\delta_1 + 0{,}01\delta_2 + 0{,}001\delta_3)($~~

$$w(L) = (1 + 0{,}1\cdot L + 0{,}01L^2 + 0{,}001L^3)(0{,}5)$$

$w_0 = 0{,}5$ de dynamiske multiplikatorene.

$w_1 = 0{,}05$

$w_2 = 0{,}005$

$w_3 = 0{,}005$

Den gule kopien beholder du/*Please keep the yellow page*

Fagtrykk Trondheim AS 11.2012

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10000

Dato/*Date:* 13.12.13 Side/*Page:* 6

Emnekode/*Subject* FIN 3006 Antall ark/*Number of pages:* 38

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Dynamiske multiplikatorer viser hvordan en midlertidig endring i x_{t+1} har påvirket den avhengige variabelen y_{t+i} i ligning i)

$w_0 = \frac{\partial y_{t+1}}{\partial x_{t+1}}$: endring i y_t samme periode det har skjedd en endring i x_t

$w_1 = \frac{\partial y_{t+2}}{\partial x_{t+1}}$, endring i y_{t+1} av en endring i x_t

Viser at i første periode vil en enhets endring i x_t endre y_t med $\underline{\beta_0 = 0,5}$

I neste periode er endringen i y_t lik $\beta_0 . a_1$ siden y_t påvirket y_t hvor i den perioden endringen skjedde og i periode $t+1$ vil denne avhengige variabelen $y(t+1)$ påvirkes gjennom y_{t-1} (med a_1)

$w_1 = a_1 \beta_0 = 0,05$

=> etterhvert vil den ned avta med raten $a_1 = 0,1$ i resterende perioder

$w_2 = a_1^2 \beta_0 = 0,005$ osv.

ii) $a(L) = 1 - 0{,}2L - 0{,}3L^2$

$\beta(L) = 0{,}5 + 0{,}7L + 0{,}2L^2 + 0{,}3L^3$

$a(L)\, y_t = \beta(L)\, x_t$

$y_t = \dfrac{\beta(L)}{a(L)} x_t \Rightarrow w(L) = \dfrac{\beta(L)}{a(L)} = \beta(L) \cdot \delta(L)$

$\Rightarrow$ 1 finner $\delta(L)$:

$a(L)\,\delta(L) = 1 + 0L + 0L^2 + \ldots$

$(1 - 0{,}2L - 0{,}3L^2)(\delta_0 + \delta_1 L + \delta_2 L^2 + \delta_3 L^3 + \ldots) = 1 + 0L + 0L^2 + \ldots$

L^0: $\delta_0 = 1$

L^1: $-0{,}2\delta_0 + \delta_1 = 0 \rightarrow \delta_1 = 0{,}2\delta_0 = 0{,}2$

L^2: $-0{,}3\delta_0 - 0{,}2\delta_1 + \delta_2 = 0 \Rightarrow \delta_2 = 0{,}3\delta_0 + 0{,}2\delta_1$

$= 0{,}3 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 = \underline{0{,}34}$

L^3: $-0{,}3\delta_1 - 0{,}2\delta_2 + \delta_3 = 0 \Rightarrow \delta_3 = 0{,}3\delta_1 + 0{,}2\delta_2$

$= 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}34 = 0{,}128$

vi ignorerer resterende ledd → de trenger ikke for å finne de 3 dynamiske multiplikatorene

$\Rightarrow w(L) = \delta(L) \cdot \beta(L)$

$w(L) = (\delta_0 + \delta_1 L + \delta_2 L^2 \ldots)(\beta_0 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \beta_3 L^3 \ldots)$

$= (1 + 0{,}2L + 0{,}34L^2 + 0{,}128L^3)(0{,}5 + 0{,}7L + 0{,}2L^2 + 0{,}3L^3)$

L^0: $w_0 = 0{,}5$

L^1: $w_1 = 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}8$

L^2: $w_2 = 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}34 \cdot 0{,}5 = 0{,}51$

L^3: $w_3 = 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}34 \cdot 0{,}7 + 0{,}128 \cdot 0{,}5 = 0{,}642$

de første 3 dynamiske multiplikatorene:

$w_0 = 0{,}5$, $w_1 = 0{,}8$ $w_2 = 0{,}51$ $w_3 = 0{,}642$

$w_0 = \dfrac{\partial y_{t+1}}{\partial x_{t+1}}$

$w_1 = \dfrac{\partial y_{t+2}}{\partial x_{t+1}}$ osv.

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10000

Dato/*Date:* 13.12.13 Side/*Page:* 8

Emnekode/*Subject* FIN 3006 Antall ark/*Number of pages:* 38

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Her ser vi ene (de dynamiske multiplikatorene) nå konsentrert ut fordi en midlertidig endring i x_t vi påvirke y_{t+i} i fremtiden både via de tilbakeliggende y-verdiene og x-verdiene:

$w_0 = \beta_0$: i periode t er endring i y_t lik $\beta_0 \Delta x_t$

$w_0 = 0{,}5$

Neste periode

$w_1 = a_0 \cdot \beta_1 + a_1 \cdot \beta_0 = 0{,}8$ → en endring i x_t vil påvirke y_{t+1} via y_t og x_t (i likningen y_{t+1} og x_{t+1}).

osv.

Her ser vi at effekten av x_t på y_{t+i} vil øke og så avta litt for så å øke igjen; vi har et svingende mønster med avtakende svingninger.

—

d) De interimme multiplikatorene viser den kumulative effekten av en endring i x på den avhengige variabelen y_{t+j}

$$w_j^* = \sum_{i=0}^{j} w_i \Rightarrow w_j^* = \frac{\partial y_{t+j}}{\partial x_{t+1}} + \frac{\partial y_{t+j}}{\partial x_{t+2}} + \dots + \frac{\partial y_{t+j}}{\partial x_{t+j}}$$

For likning i):

$w_0^* = w_0 = 0{,}5$

$w_1^* = w_0^* + w_1 = 0{,}5 + 0{,}05 = 0{,}55$

$w_2^* = w_1^* + w_2 = 0{,}55 + 0{,}005 = 0{,}555$

osv.

Den kumulative effekten er sterk i starten, øker svært lite i senere perioder

NTNU

Kandidat nr./Candidate no. 10000

Dato/Date: 13.12.13 Side/Page: 9

Emnekode/Subject FIN3006 Antall ark/Number of pages: 38

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

for likning ii) : de interne multiplikatorene er;

$W_0^* = W_0 = 0{,}5$

$W_1^* = W_0^* + W_1 = 0{,}5 + 0{,}8 = 1{,}3$

$W_2^* = W_1^* + W_2 = 1{,}3 + 0{,}51 = 1{,}81$

$W_3^* = W_2^* + W_3 = 1{,}81 + 0{,}642 = \underline{2{,}452}$

Her har vi en jevnere økning i den kumulative effekten i starten, men dette avtar etter hvert.

e) De standardiserte responsene finnes ved at man deler de respektive multiplikatorene på den langsiktige multiplikatoren.

$W^* = \frac{\beta(1)}{\alpha(1)}$ → den vi fant i oppgave b).

Likning i):

$W^* = 5/9 = 0{,}555556$

de standardiserte dynamiske ($\bar{W}_i$)

$\bar{W}_0 = \frac{0{,}5}{(5/9)} = 0{,}9$ ⇒ 90% av den totale effekten finner sted i første periode

$\bar{W}_1 = \frac{0{,}05}{(5/9)} = 0{,}09$ 9% —"—

$\bar{W}_2 = \frac{0{,}005}{(5/9)} = 0{,}009$ 0,9%

(viser at denne raten avtar med $\alpha_1 = 0{,}1$)

de standardiserte interime multiplikatorer:

$\bar{W}_0^* = \frac{W_0^*}{W^*} = \frac{0{,}5}{5/9} = 0{,}9 = \bar{W}_0$

$\bar{W}_1^* = \frac{W_1^*}{W^*} = \frac{0{,}55}{(5/9)} = \underline{0{,}99}$: 99% av den totale effekten fant sted frem til periode 1. (i løpet av periode 0 og 1).

Den gule kopien beholder du/Please keep the yellow page

$\bar{\omega}_2^* = \frac{\omega^*_2}{\omega^*} = \frac{0,535}{(578)} = 0,989$

99,9% av den totale effekten finner sted frem til periode 2.

⇒ vi ser at meste parten av effekten på y av en midlertidig endring i x_t finner sted i de første 2 periodene.

Oppgave 2(ii)   ; $w^* = \frac{B(1)}{a(1)} = 3,4$ (fra 2b)

de standardiserte dynamiske multiplikatorne:

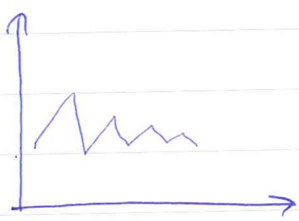
$\bar{\omega}_0 = 0,5/3,4 = 0,1471$

$\bar{\omega}_1 = \frac{0,8}{3,4} = 0,2353$

$\bar{\omega}_2 = \frac{0,51}{3,4} = 0,15$

$\bar{\omega}_3 = \frac{0,642}{3,4} = 0,1888$

Her kan vi se et annet mønster, effekten av en endring i x_t (som en andel av den totale effekten) øker etter periode 1 (t=1) fordi i neste periodene blir y påvirket gjennom flere kanaler (de tilbakedaterte y og x) ⇒ effekten vil variere noe, men svingningene ser ut til å være dempende ⇒ det må da være hvis vi skal ha en langsiktig likevektsløsning.



Her vil det være interessant å spore opp resterende dinamiske multiplikatorne..

de standardiserte interimmultiplikatorene:

$\bar{\omega}_0^* = \bar{\omega}_0 = 0,1471$

$\bar{\omega}_1^* = \frac{\omega_1^*}{\omega^*} = \frac{1,3}{3,4} = 0,3824$

$\bar{\omega}_2^* = \frac{\omega_2^*}{\omega^*} = \frac{1,81}{3,4} = 0,5324$

$\bar{\omega}_3^* = \frac{2,452}{3,4} = 0,7212$

Her ser vi en nokså jevn økning: 14,71 % av den totale effekten finner sted i første periode. Etter 3 perioder ser vi at 72,12 % av den totale effekten har funnet sted.

Sammenlignet med prosessen beskrevet i ligning i) vil tilpasningen mot den langsiktige likevekten gå mye lengre nå med prosessen beskrevet i ligning ii).

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10002

Dato/*Date:* 13.12.13. Side/*Page:* 12

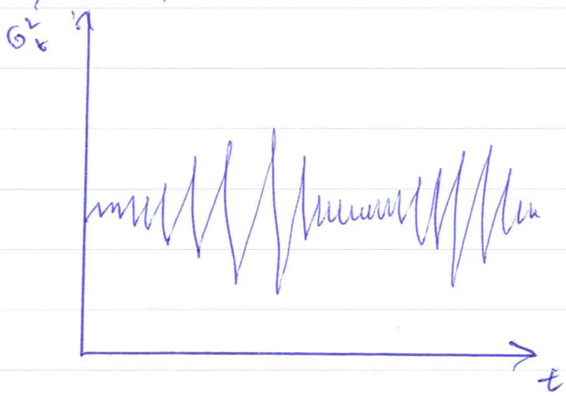
Emnekode/*Subject* FIN3006 Antall ark/*Number of pages:* 38

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Oppgave 3

a) Volatilitetsklumping er et fenomen som ofte er observert i finansiell data. Den kjennetegnes av at volatiliteten ikke er konstant, men av at den er høy i noen perioder, men nokså lav i andre perioder.



En mulig forklaring på dette er at informasjon som kan påvirke bevegelser i aktiva (for eksempel priser, avkastninger m.m.) kommer ikke jevnt fordelt over tid men i pulser, slik at når mye relevant informasjon kommer i løpet av en periode, vil det øke volatiliteten noe kraftig. Etter at denne 'infopulsen' er over ⇒ volatiliteten går ned igjen.

Dette er viktig å kunne modellere, og dette fanges ikke opp av lineære modeller. Vi må tillate at variansen varierer over tid, altså at den ikke er konstant ⇒ vi må oppheve antagelsen om homoskedastisitet og introdusere heteroskedastisitet, med σ_t, ikke σ.

Vi må også tillate at denne variansen er autoregressiv ⇒ at den avhenger av tidligere sjokk u_{t-i} → dette gjør vi i ARCH, og av sine egne tidligere verdier (GARCH).

Kandidat nr./*Candidate no.* 10000

Dato/*Date:* 13.12.13 Side/*Page:* 13

Emnekode/*Subject* FIN3006 Antall ark/*Number of pages:* 18

Viser nå betinget varians på basis av en enkel AR(1)-prosess:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + u_t \quad \text{hvor } u_t \sim N(0, \sigma^2) \text{ (iid)}$$

hvit støy

$$Var(y_t | y_{t-1}) = Var(a_0) + a_1^2 Var(y_{t-1}) + Var(u_t)$$

siden vi har betinget varians, vet vi verdien til y_{t-1} ⇒

$Var(y_{t-1}) = 0$ ⇒

$$Var(y_t | y_{t-1}) = Var(u_t | y_{t-1}) = \sigma^2$$

$$E[u_t] = 0 \quad E[u_t^2 | y_{t-1}] = \sigma^2 \Rightarrow E[u_t^2 | u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots] = \sigma_t^2$$

Vi kan uttrykke variansen$_t$ som en funksjon av tidligere residualer.

$$\Rightarrow \sigma_t^2 = f(u_{t-1}, u_{t-2}, u_{t-3} \ldots)$$

⇒ vi kan spesifisere σ^2 som:

$$\text{ARCH}(1): \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2$$

eller generelt: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i u_{t-i}^2$: en ARCH(q)-modell (parallell)

Den er parallell fordi vi kun viser residualligningen.

En fullstendig modell har

1) betinget forventningsligning:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + u_t \quad , u_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

2) residualligning:

$$u_t = v_t \sigma_t \quad , v_t \sim N(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 \quad (\text{ARCH}(1))$$

Dette er et eksempel på ARCH(1) og AR(1)-modell

Dette er ARCH: autoregressiv betinget (conditional) heteroskedastisitet.

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Fagtrykk Trondheim AS 11.2012

Her er det viktig og huske at ikke-negativitet betingelse skal være oppfylt:

$\alpha_0 > 0$

$0 < \alpha_1 < 1$

Fordi σ^2_t er varians og bør være et positivt tall.

Fra den utlede kan forventet at u_t er normalfordelt, uttrykker vi det ved hjelp av $v_t \sim N(0,1)$ og σ_t, hvor $\sigma_t = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 u^2_{t-1}}$ =>

=> $u_t = v_t\sigma_t = v_t\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 u^2_{t-1}}$

Viser at hvis ikke-negativitetsbetingelse er brutt => likningen vil ikke gi mening.

Det kan hende at vi får en varians som er en funksjon av flere lang tids faktorer => q er stor => mye å estimere, mindre presisjon pga av mange parametere og som følge få frihetsgrader => man bruker GARCH

(I oppgave b) vi seg vi at GARCH(1,1) kan uttrykkes som en ARCH(∞) og vi dermed fange opp alle q lag i ARCH).

For testing av ARCH-effekter => se oppgave 3d).

Her konsentrerer jeg meg på hvordan volatilitetsklumping kan ~~observeres~~ modelleres => jeg går videre til

GARCH-modell.

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* T0000

Dato/*Date:* 13.12.13   Side/*Page:* 15

Emnekode/*Subject* FIN 3006   Antall ark/*Number of pages:* 38

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

ARCH -modellen kan generaliseres til GARCH, her tillater man at σ^2_t (betinget varians) blir en funksjon av sine tidligere verdier:

residualligningen ser da slik ut: $u_t = v_t \sigma_t$ hvor

$$\sigma^2_t = \alpha_0 + \alpha_1 u^2_{t-1} + \beta \sigma^2_{t-1}$$

$$\Rightarrow u_t = v_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 u^2_{t-1} + \beta \sigma^2_{t-1}}$$

I et generelt tilfelle:

$$\sigma^2_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i u^2_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma^2_{t-j}$$

Dette er heldigvis nødvendig: de fleste prosessene kan fanges opp av GARCH(1,1).

Viser at denne modellen minner om ARMA(p,q) fordi σ^2_t er en funksjon av sine tidligere verdier (AR(p) og tidligere sjokk (MA(q)).

Dette kan også vises med en utledning som jeg ikke viser her for å kunne konsentrere meg om spørsmål a).

Fullstendig modell

generell GARCH(p,q) i residualligningen og for eksempel AR(1) i betinget forventningsligning.

$$\begin{cases} y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma^2_t) \\ u_t = v_t \sigma_t \\ \sigma^2_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i u^2_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma^2_{t-j} \end{cases}$$

Variansen kan tolkes som en vektet gjennomsnitt av sin langsiktige gjennomsnitt α_0; tidligere kvadrerte sjokk vektet med koeffisientene α_i og egne tidligere verdier vektet med β_j

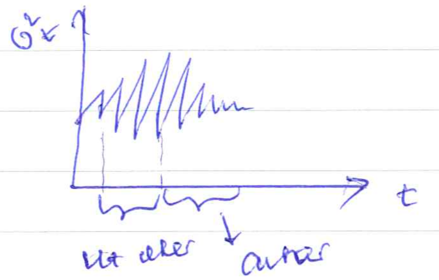
Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Denne modellen kan hjelpe oss å modellere volatilitets-klumpering (clustering) fordi den tar hensyn til sine tidligere verdier og tidligere støkk.

Hvis σ_t øker i en periode, vil det påvirke σ_{t+1} gjennom det siste leddet. Vektingen av tidligere verdiers betydning bestemmes av β-er. ~~ved~~ I tillegg blir variansen σ_t påvirket av tidligere støkk u_{t-i}. Hvis det er en periode med mange nyheter får vi en betydelig økning i u_{t-i}. Uavhengig av dettes fortegn vil variansen øke fordi vi bruker u^2_{t-i}, de kvadrerte verdier.

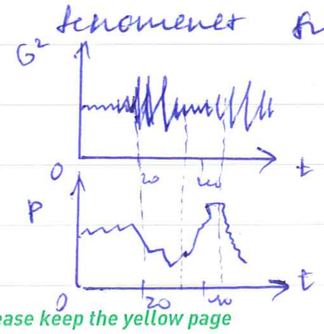
Når u_{t-i} øker, vil σ^2_t øke => slik har vi modellene økende varians i perioder.
Når u_t går ned vil σ^2_t avta etter hvert.



Her vil de gode og de dårlige nyheter være likt =>

men det er blitt observert ~~at~~ gode nyheter påvirker varians i mindre grad enn de dårlige nyheter av samme relativ størrelse, dette fenomenet fikk navn "leverage effects". Forekomst:

P: pris på aksjen



vi tolker prisnedgang som en dårlig nyhet => økt σ^2

prisoppgang: $u_{t-1} > 0$ => lav volatilitet

Det finnes flere måter å modellere dette på:

GJR / TGARCH: (Threshold garch)

Vi innfører en ekstra dummy : d_{t-1}

$$\begin{cases} y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma_t^2) \\ u_t = v_t \sigma_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-1}^2 + \varphi \cdot u_{t-1}^2 \cdot d_{t-1} \end{cases}$$

hvor $d_{t-1} \begin{cases} 1 & \text{når } u_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

Ved GARCH (1,1) vil vi få følgende effekt på volatilitet:

ved $u_{t-1} \geq 0$: α_1 (av u_{t-1}^2)

$u_{t-1} < 0$ $(\alpha_1 + \varphi)$: større effekt

=> Variansen øker mer ved dårlige nyheter enn ved gode nyheter.

En annen modell som egner seg:

egarch

hvor residualligningen ser slik ut:

$u_t = \sigma_t v_t \quad v_t \sim N(0,1)$

$$\ln \sigma_t^2 = \alpha_0 + \ln \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma_0 \frac{u_{t-1}}{\sigma_{t-1}} - \gamma_1 \left(\left| \frac{u_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)$$

Her ser vi at de positive nyhetene $(u_{t-1} > 0)$ blir "jevnet ut" med hverandre til en viss grad => effekten blir relativt lav sammenlignet med de negative nyhetene: deres bidrag til (σ_t) varians blir $-\gamma_0 \frac{u_{t-1}}{\sigma_{t-1}} - \gamma_1 \left(\frac{u_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right)$.

I tillegg er denne modellen på en form for variansen => man kan ikke brudd på ikke negativitetsbetingelsene.

Leveraged effect kan også fanges opp av agarch (1,1) (asymmetrisk garch) hvor residualligningen er.

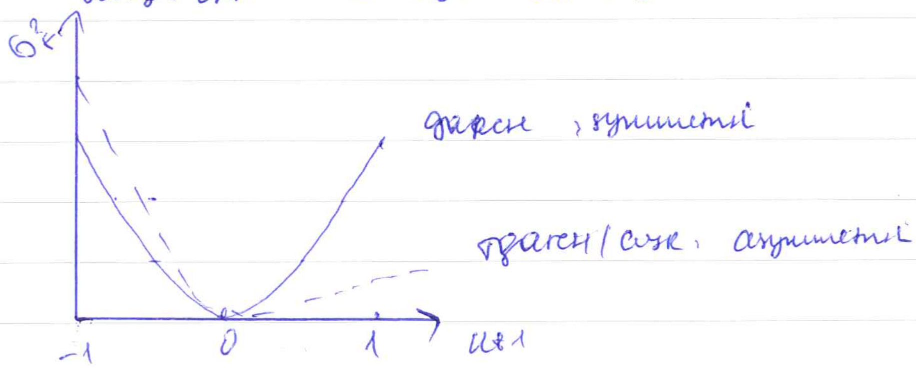
$$u_t = v_t \sigma_t$$

$$\sigma^2_t = \alpha_0 + \alpha_1 (u_{t-1} - \lambda)^2 + \beta \sigma^2_{t-1}$$

hvor λ er leverage effect

Her ser vi også at gode nyheter øker variansen mindre enn de dårlige nyheter.

Jeg kan illustrere hvordan en slik modell fanger opp leverage effects



Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

b) GARCH. er en sparsommelig utgave av ARCH.
I ARCH avhenger volatiliteten av gamle residualer, det kan hende at antall lag i ARCH må være nokså høyt for å fange opp alle ARCH-effekter.
Det fører til at vi må estimere mange parametre.
GARCH vil fange opp mange lag (alle lag frem til $(t-1)$, leddet σ^2_{t-1} ⇒ trenger å estimere færre parametre fordi en vanlig GARCH(1,1) vil som regel fange opp all info fra før $(t-1)$ i σ^2_{t-1}, og info fra $(t-1)$ i u_{t-1}-leddet.

Formelt kan vi vise at GARCH(1,1) kan gjøres om til en ARCH(∞):
Tar utgangspunkt i residualligningen:

$$\sigma^2_t = \alpha_0 + \alpha_1 u^2_{t-1} + \beta\sigma^2_{t-1}$$

$$\sigma^2_{t-1} = \alpha_0 + \alpha_1 u^2_{t-2} + \beta\sigma^2_{t-2}$$

$$\sigma^2_{t-2} = \alpha_0 + \alpha_1 u^2_{t-3} + \beta\sigma^2_{t-3}$$

$$\Rightarrow \sigma^2_t = \alpha_0 + \alpha_1 u^2_{t-1} + \beta(\alpha_0 + \alpha_1 u^2_{t-2} + \beta\sigma^2_{t-2})$$
$$= \alpha_0 + \alpha_1 u^2_{t-1} + \beta\alpha_0 + \beta\alpha_1 u^2_{t-2} + \beta^2[\alpha_0 + \alpha_1 u^2_{t-3} + \beta\sigma^2_{t-3}]$$

$$\sigma^2_t = \alpha_0(1 + \beta + \beta^2) + \alpha_1(1 + \beta L + \beta^2 L^2)u^2_{t-1} + \beta^3\sigma^2_{t-3}$$

Fortsetter i det uendelige.

$$\sigma^2_t = \alpha_0(1 + \beta + \beta^2 + \dots) + \alpha_1(1 + \beta L + \beta^2 L^2 + \dots)u^2_{t-1} + \beta^\infty \cdot \sigma^2_0$$

$\beta < 1$, $\Rightarrow t \Rightarrow \infty$

$$\sigma^2_t = \frac{\alpha_0}{1-\beta} + \alpha_1(1 + \beta L + \beta^2 L^2)u^2_{t-1} \quad \text{og } \beta^\infty \Rightarrow 0 \Rightarrow \beta^\infty\sigma^2_0 = 0$$

setter $\frac{\alpha_0}{1-\beta} = \gamma_0$ $\quad \gamma_1 = \alpha_1,\ \gamma_2 = (\alpha_1 + \beta)$ osv

hvor: $\gamma_i = (\alpha + \beta^{i-1})$

NTNU

Kandidat nr./Candidate no. 10 000

Dato/Date: 13.12.13 Side/Page: 20

Emnekode/Subject FIN3006 Antall ark/Number of pages: 39

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

$\sigma^2_t = \gamma_0 + \gamma_1 u^2_{t-1} + \beta_2 u^2_{t-2} + \beta_3 u^2_{t-3} \ldots$

GARCH(1,1) kan uttrykkes som en ARCH(∞).

med GARCH(1,1) behøver vi kun å estimere α_0, α_1 og β

her [ARCH(∞): uendelig mange γ_i

=) Heller enn å gå ARCH veien =)

prøver heller en GARCH(1,1).

c) GARCH(1,1) viser hvordan vi går mot likevekten i variansen ved kompensasjon av avvikene →

dette er en likevektskompensasjonsmodell.

→ la oss se på langtidslikevekt variansen:

$\sigma^2_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot u^2_{t-1} + \beta\sigma^2_{t-1}$

innfører en. prediksjonsfeil v_t,

$v_t = u^2_t - \sigma^2_t$ $\qquad v_t \sim N(0,1)$

$\sigma^2_t = -v_t + u^2_t$

$u^2_t - v_t = \alpha_0 + \alpha_1 u^2_{t-1} + \beta\sigma^2_{t-1}$

$u^2_t = \alpha_0 + \alpha_1 u^2_{t-1} + \beta(u^2_{t-1} - v_{t-1}) - v_t$

$u^2_t = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta)u^2_{t-1} - \beta v_{t-1} - v_t$

(Her ser vi at GARCH(1,1) representerer en ARMA(1,1) for u^2_t.

Tar forventninger

$E[u^2_t] = E[\alpha_0 + (\alpha_1 + \beta)u^2_{t-1} - \beta v_{t-1} - v_t)]$

$E[u^2_t] = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta)E[u^2_{t-1}]$ $\qquad$ siden $E[\beta v_{t-1}] = E[v_t] = 0$

Den gule kopien beholder du/*Please keep the yellow page*

Fagtrykk Trondheim AS 11.2012

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10000

Dato/*Date:* 13.12.13 Side/*Page:* 21

Emnekode/*Subject* FIN 3006 Antall ark/*Number of pages:* 38

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Her bruker vi lie:

⇒ law of iterated expectations:

Den ubetingede forventningene til forventningen til den betingede forventningen:

$$E[u_t^2] = E_{t-1}[E[u_t^2]] = \sigma_t^2$$

$$E_{t-2}[u_{t-1}^2] = E[u_{t-1}^2] = \sigma_{t-1}^2$$

$$\Rightarrow E[u_t^2] = \sigma_u^2$$

$$\sigma_u^2 = \alpha_0 + (\alpha_1+\beta)\cdot\sigma_u^2 \quad \Leftrightarrow \alpha_0 = \underline{[1-(\alpha_1+\beta)]\cdot\sigma_u^2} \quad (*)$$

$$\sigma_u^2 = \frac{\alpha_0}{1-(\alpha_1+\beta)} \quad ; \text{ likevektsvarians}$$

For at det skal eksistere likevekt må

$\alpha_1+\beta<1 \Rightarrow$ ellers vil det ikke gi mening

$\alpha_1+\beta=1 \Rightarrow$ eksplosiv varians (I-GARCH) går mot det uendelige

generelt $\boxed{1-\sum_{i=1}^{q}\alpha_i-\sum_{j=1}^{p}\beta_j>0}$ en nødv. betingelse for potensiell likevekt

Bruke (*) og sette inn i

$$\sigma_t^2 = (1-(\alpha_1+\beta))\cdot\sigma_u^2 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

trekke fra σ_{t-1}^2 på begge sider

$$\Delta\sigma_t^2 = \sigma_u^2-(\alpha_1+\beta)\sigma_u^2 + \alpha_1 u_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

$$\Delta\sigma_t^2 = (1-\beta)\cdot[\sigma_u^2-\sigma_{t-1}^2] + \alpha\cdot[u_{t-1}^2-\sigma_u^2]$$

GARCH som ECM

$$\underline{\underline{\Delta\sigma_t^2 = -(1-\beta)(\sigma_{t-1}^2-\sigma_u^2) + \alpha(u_{t-1}^2-\sigma_u^2)}}$$

Viser at endring i variansen avhenger av avviket mellom den kortsiktige variansen σ_{t-1}^2 og den langsiktige variansen σ_u^2. Hvis den kortsiktige er større enn likevekt vil endringen i σ_t^2 være negativ ($\beta<1 \Rightarrow (1-\beta)>0 \Rightarrow$

Den gule kopien beholder du/*Please keep the yellow page*

Fagtrykk Trondheim AS 11.2012

NTNU

Kandidat nr./Candidate no. 10000

Dato/Date: 13/12/13 Side/Page: 22

Emnekode/Subject FIN3006 Antall ark/Number of pages: 38

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

$-(1-\beta)<0$) ⇒ man haver kompensering mot likevekt verdien.

Så må σ_t^2 avhenge av σ^2_{t-1}, som tidligere vente, desto høyere β ⇒ desto saktere er kompenseringen mot likevekten!

$\beta\uparrow \Rightarrow (1-\beta)\downarrow$

Endringen i variansen vil også avhenge av avviket mellom nyheter (u^2_{t-1}) og den langsiktige likevekt verdien.

→ GARCH som ECM:

$$\Delta\sigma_t^2 = -(1-\beta)\underbrace{(\sigma^2_{t-1}-\sigma^2_u)}_{\text{garch delen}} + \alpha\underbrace{(u^2_{t-1}-\sigma^2_u)}_{\text{arch delen}}$$

Den gule kopien beholder du/Please keep the yellow page

Fagtrykk Trondheim AS 11.2012

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

d) Generelt vil betinget volatilitet være bedre enn ubetinget volatilitet.

generelt ved $y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + u_t$

ubetinget: $Var(y_t) = E[(y_t - E(y_t))^2]$

$$Var(y_t) = E\left[\left(\frac{a_0}{1-a_1} - \frac{a_0}{1-a_1} + a_1^t [\quad] + \Sigma a_1^i u_{t-i}\right)^2\right]$$

$t \to \infty$, $\Rightarrow a_1^t \to 0$ $\Rightarrow E(u_t^2 \cdot (1 + a_1^2 + a_1^4 + 0(\sigma \ldots)))$

$$\Rightarrow Var(y_t) = \frac{\sigma^2}{1-a_1^2} \quad \text{gitt at} \quad a_1 < 1$$

betinget varians

$$Var_{t-1}(y_t) = var(\alpha_0 + \alpha_1 E(y_{t-1}) + u_t)$$
$$= \sigma^2$$

$$\frac{\sigma^2}{1-a_1^2} > \sigma^2$$

Vi bør modellere for betinget volatilitet når dette autoregressive heteroskedastiske elementet i modellen →
vi bør teste for ARCH-effekter.
→ det kan hende modellen e lineær og har konstant varians ⇒

testen for ARCH effekter:

1. estimerer en lineær modell med OLS
feks. $y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + u_t$ $u_t \sim N(0, \sigma_t^2)$
lagrer $\hat{u}_t$, kvadrer dem

2. estimerer: $\hat{u}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_q u_{t-q}^2 + v_t$
tester om
$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_q = 0$
H_1: minst én av di $\neq 0$
→ LM-test: $TR^2 \sim \chi^2_q$ hvor T: antall observasjoner
R^2: R^2 fra regresjonen

eller en F-test, $\dfrac{R^2/q}{(1-R^2)/T-k-1} \sim \chi^2_q$ q: antall restriksjoner
$T-k-1$ = df (frihetsgrader)

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10000

Dato/*Date:* 13.12.13 Side/*Page:* 24

Emnekode/*Subject* FIN 3006

Antall ark/*Number of pages:* 38

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Hvis $\hat{u}^2_t$ er uavhengig av sine tidligere verdier →

H0 kan ikke forkastes →

ved avhengighet $(\hat{u}^2_t = f(\hat{u}^2_{t-i}))$ →

H0 forkastes.

Fagtrykk Trondheim AS 11.2012

Kandidat nr./*Candidate no.* 10000

Dato/*Date:* 131213 Side/*Page:* 25

Emnekode/*Subject* FIN3006 Antall ark/*Number of pages:* 38

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

Oppgave 4

Vi har to serier her

3mnds rente (r3m) og 10 års rente (r10y).

Rentene er som regel ikke-stasjonære prosesser.

Stasjonaritet er et viktig begrep innenfor tidsserier.

Stasjonaritet kan være streng eller svak;

Strengt stasjonære serier følger samme fordeling (alle momentene) uavhengig av tid.

$F(y_t, y_{t+1}, \ldots, y_{t+m}) = F(y_{t+k}, y_{t+1+k}, \ldots, y_{t+m+k})$

Dette meget strengt, det vanlige er:

svakt stasjonære serier hvor kravene er:

1) konstant forventning: $E(y_t) = E(y_{t+m})$

2) konstant varians: $Var(y_t) = Var(y_{t+m})$

3.) konstant autokovarians $\gamma_s = \gamma_{s+m}$

→ en slik serie er svakt stasjonær og er integrert av orden 0 I(0)

Det er viktig å bestemme om seriene er stasjonære eller ikke.

En ikke-stasjonær serie har mange egenskaper, effekter av støt dør ikke ut. Ved estimering og modellering med ikke-stasjonære serier vil vi få spuriøse funn (mer seriene deler felles trend men denne sammenhengen vil ikke gi noe mening selv om den ser bra ut på papiret.

Man kan heller ikke bruke slike serier til vanlige estimeringer ~~med vanlige~~ vanlige estimeringsmetoder er ugyldige

de ikke-stasjonære ~~sett~~ serier følger ikke den vanlige t-fordelingen eller F-fordelingen.

Den gule kopien beholder du/*Please keep the yellow page*

Fagtrykk Trondheim AS 11.2012

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10000

Dato/*Date:* 131213 Side/*Page:* 26

Emnekode/*Subject* ECN2006 Antall ark/*Number of pages:* 38

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Rentene e ofte ikke-stasjonære serier ⇒
for å kunne estimere den og teste estimatorene
bør vi differensiere den ⇒
slik fjerner vi den stokastiske trenden.

$\Rightarrow y_t = y_{t-1} + u_t$; RW : I(1) serie $u_t \sim N(0, \sigma^2)$

En ikke-stasjonær serie e integrert av orden 1
hvis den inneholder en enhetsrot ⇒
$I(1)$
Vi kan differensiere vekk denne enhetsroten
$y_t(1-L) = u_t$
$\underline{\Delta y_t = u_t}$ $u_t \sim$ en hvit støy prosess ⇒ stasjonær

⇒ generelt; en serie $I(d) \sim \Delta^d I(0)$
Hvis vi differensierer en I(1)-serie en gang
får en I(0) serie.

⇒ dette bør vi også gjøre med rentene hvis
vi oppdager at de e en I(1)-prosess.

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10 000

Dato/*Date:* 13/12/13 Side/*Page:* ~~26~~ 27

Emnekode/*Subject* FIN 3001 Antall ark/*Number of pages:* 38

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Vi ser at ligning (1) og (2) handler om ikke-stasjonære-rene, nemlig renter => vi ser differensierte verdier (Δx) => Dette muliggjør estimering fordi vi får stasjonære variabler, men så ser vi et ikke-differensiert ledd =>

dette ser ut som Johansenmetode hvor likningene dreier ut => den muliggjør oss å jobbe både med ~~[illegible]~~ stasjonære og ikke-stasjonære variabler i samme sett.

Hvis parameterne foran $r3m_{t-1}$ og $r10y_{t-1}$ er signifikante => dette er utgave av Engel, men ingen av dem er det =>

$$\frac{-0{,}013}{0{,}069} > -2 \qquad \frac{-0{,}017}{0{,}012} > -2 \Rightarrow$$

Vi har ingen kointegrasjon

I dette tilfellet får vi en to likninger på differanseform uten kointegrasjon.

Dette er helt ut VAR → ingen r10yt ledd i $\Delta r3m_t$-ligningen.

Konklusjon for (1) og (2):

differansene til rentene er forklart av tidligere differanser → signifikante verdier for 3lag i $\Delta r3m_t$

men ikke for $\Delta r10y_t$ → det ser ut som at den lange renten er mindre avhengig av kortsiktige differanser.

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10 000

Dato/*Date:* 13 12 13 Side/*Page:* 28

Emnekode/*Subject* FIN3006 Antall ark/*Number of pages:* 38

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Ligning (3/c) estimering av en langsiktig sml. mellom r3m og r10 yt.

Disse seriene er ikke-stasjonære, men e mest sannsynlig koblet sammen ved en felles stokastisk trend, så deres trend er koblet sammen og de kan ikke bevege seg uavhengig av hverandre. Hvis det er tilfellet så ~~ser~~ seriene er kointegrerte.

Seriene w_i er kointegrerte hvis deer av samme orden $w_i \sim I(d)$ og det eksisterer en vektor β slik at $\beta' w \sim I(d-b)$.

Dette kan vi teste ved å gjennomføre Engle og Granger testen

1. estimere en sammenheng mellom dem

$$r3m_t = \delta(r10y)$$

$$r3m_t = -0{,}23 + 0{,}98\ r10yt.$$

Herfra kan vi lage residualene,

$$\hat{e}_t = r3m_t - \hat{r3m}_t.$$

Videre kan vi teste om residualene er stasjonære hvis de er det er seriene kointegrerte. Hvis $u_t \sim I(1)$ så har en spuriøs sml.

2. vi gjennomfører en Dickey-Fuller-test på residualene.

$$\Delta u_t = \beta_0 + \varphi u_{t-1}$$

→ denne ligningen kommer fra.

Fagtrykk Trondheim AS 11.2012

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10000

Dato/*Date:* 13.12.13 Side/*Page:* 29

Emnekode/*Subject* FIN 3006 Antall ark/*Number of pages:* 38

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

$\hat{u}_t = \beta_0 + \varphi \hat{u}_{t-1} + v_t$

$\Rightarrow \hat{u}_t - \hat{u}_{t-1} = \beta_0 + (\varphi - 1) \cdot \hat{u}_{t-1} + v_t$

$\Rightarrow \Delta \hat{u}_t = \beta_0 + \psi \hat{u}_{t-1} + v_t$ hvor $\psi = \varphi - 1$

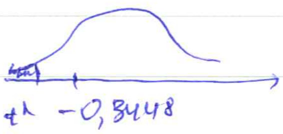
Dickey-Fuller testen går ut på følgende:

H_0: $\psi = 0$ ($\Leftrightarrow \varphi = 1$) $\Rightarrow \hat{u}_t \sim I(1)$
ikke-stasjonært,
(ved RW: start på transisjoner e uttrykt av høyere orden enn $1 \Rightarrow$
H_0 er ofte $I(1)$)

H_1: $\psi < 0$ ($\Leftrightarrow \varphi < 1$) $\hat{u} \sim I(0)$: stasjonært

t-test:

$$t^{obs} = \frac{\hat{\psi}}{se(\hat{\psi})} = \frac{-0{,}1}{0{,}029} = -0{,}3448$$



Vi kan ikke bruke de vanlige ~~de~~ t-verdier i dette tilfellet siden H_0 er ikke-stasjonært $\Rightarrow$ Vi må benytte oss av egne kritiske verdier simulert av Engle & Granger, men i dette tilfellet, siden vi tester residualene og ikke rådata bør vi bruke Engle & Yoo sine verdier $\Rightarrow$ de er enda større i absoluttverdi enn Engle-Granger-verdiene oppnådd ved Monte-Carlo simulering.

~~De er mere~~

De som er oppgitt i tabellen er ikke helt gyldige siden vi har en konstant her og testverdiene er oppgitt uten konstant i modellen.

Kandidat nr./Candidate no. 10000

Dato/Date: 13/12/13 Side/Page: 38

Emnekode/Subject FIN3006 Antall ark/Number of pages: 48

Konstanten er nærmest insignifikant.

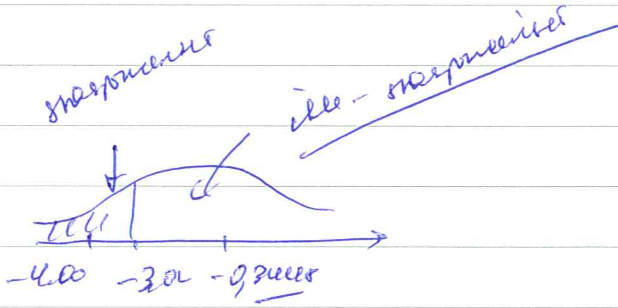
DF- kritiske verdier er sensitive til slike ting, derfor finnes det 3 versjoner av testen

1) uten konstant og trend
2) med konstant (μ), uten trend
3) med begge deler

Og er simulert kritiske verdier for alle 3 tilfellene.

Hansen:

$t_{obs} = -0,3448$



2 variabler i systemet, 254 obs ⇒ t_{krit}: -3,02 (10%), -3,37 (5%), -4,00 (1%)

→ vi har at $\hat u_t$ er ~ I(1)- serie ⇒

ingen kointegrasjon mellom rentene!

Problemet, hvis det er seriekorrelasjon i restleddene ⇒ bør bruke utvidet DF: ADF (augmented DF):

$$\Delta \hat u_t = b_0 + \varphi \hat u_{t-1} + \sum_{i=1}^{K} \theta_i \Delta \hat u_{t-i} + v_t$$

men har ikke annet alternativ: Ljung-Box-verdiene oppgitt.

For at Dickey-Fuller skal gi fornuftige resultater, bør restleddet v_t være hvit støy. Ved seriekorrelasjon ⇒ ugyldig.

Fagtrykk Trondheim AS 11.2012

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10060

Dato/*Date:* 131213 Side/*Page:* 31

Emnekode/*Subject* FEN2006 Antall ark/*Number of pages:* 38

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Ljung-Box

$$Q^* = T(T+2)\cdot\sum_{j=1}^{K}\frac{\sigma_j^2}{(T-j)} \sim \chi^2_{df}$$

den tester om autokorelasjonen til restleddene avviker fra null eller ei.

Hvis v_t er hvit støy →

$E(v_t)=0$

$Var(v_t) = \gamma_0 =$ konstant

Autokovarians $\gamma_{s} = \begin{cases} \gamma_0 & \text{ved } s=t \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

⇒ Hvis autokovariansen til v_t avviker fra 0 for $s \neq t$ ⇒ v har seriekorelasjon ⇒ Antagelsen er ikke gyldig.

Her: $\chi^2(12) = 8{,}88 < 28{,}300$ (tabellen)

⇒ ingen autokorelasjon /

⇒ ingen seriekorelasjon i restleddene.

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10000

Dato/*Date:* 131213 Side/*Page:* 32

Emnekode/*Subject* PEN3006 Antall ark/*Number of pages:* 38

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

(6): dette er EqCM-modell

Vi ser om dette en likevektskompenseringssammenheng ⇒ enhver kointegrert serie kan uttrykkes som en EqCM og Grangers representasjonsteorem.

CIA EqCM

Vi estimerer en EqCM og ser at parameteren foran den kompenserende delen ⇒ dit ⇒ de ~~...~~ signifikanten

$$t = \frac{-0,11}{0,029} = -3,79$$ ⇒ det eksisterer en kompensasjon mot likevekten.

⇒ endringen i r3mnt avhenger av de kortsiktige endringene i renten (rnoff) og ~~endringen i~~ avviket fra den langsiktige likevekten ~~(...)~~ i forrige periode (t−1).

Den gule kopien beholder du/*Please keep the yellow page*

Fagtrykk Trondheim AS 04.2013

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* ~~33~~ 10000

Dato/*Date:* 131213 Side/*Page:* 33

Antall ark/*Number of pages:* 38

Emnekode/*Subject* ECN 3002

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Utledningen ; (6) ;

setter $r_{1nt} = x_{1t}$

$r_{2nt} = x_{2t}$

$x_{1t} = \alpha \cdot x_{2t} + u_t$

$u_t = x_{1t} - \alpha x_{2t}$

$\Delta u_t = \Delta x_{1t} - \alpha \Delta x_{2t}$

$\Delta u_{t-1} = \Delta x_{1t-1} - \alpha \Delta x_{2t-1}$

$u_{t-1} = x_{1t-1} - \alpha x_{2t-1}$

setter $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$

$\Delta x_{1t} = \alpha \Delta x_{2t} + \Delta u_t \Rightarrow$

$\Delta x_{1t} = \alpha \Delta x_{2t} + u_{t} - u_{t-1}$

$\Delta x_{1t} = \alpha \Delta x_{2t} + u_t - (x_{1t-1} - \alpha x_{2t-1})$

$\Delta x_{1t} = \alpha \Delta x_{2t} + \rho u_{t-1} + \varepsilon_t - x_{1t} + \alpha x_{2t-1}$

$\Delta x_{1t} = \alpha \Delta x_{2t} - (1-\rho) \cdot [u_{t-1}] + \varepsilon_t$

Tolkning; $\Delta x_{1t} = \alpha \Delta x_{2t} - (1-\rho) [x_{1t-1} - \alpha x_{2t-1}] + \varepsilon_t$

Dr 3mt = ... inneholder ... lag, men de er insignifikante. Andet er lik det korrigerte avviket i den avhengige variabelen (Δx_{2t-1} og avviket mellom verdien til den avhengige variabelen i forrige periode og den langsiktige likevekten (her αx_{2t-1})

$(1-\rho)$ er justeringshastigheten;

her i modellen $(1-\rho) = 0{,}11$

$\Rightarrow \rho = 0{,}89$

ρ angir hvor mye verdien av ~~av~~ avviket avhenger av tidligere verdier $\Rightarrow$

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10000

Dato/*Date:* 131213 Side/*Page:* 34

Emnekode/*Subject* FIN2006

Antall ark/*Number of pages:* 38

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

ved ρ så vi en høy grad av persistens i rentemetoden
$(1-\rho)$ er lavere kompensasjon foregår sakte.

$\Rightarrow$ $\Delta \hat{r}3mnt = -0{,}11\, \hat{u}_{t-1} + 0{,}65\, \Delta r10y_{t-1}$.

økning i ~~[illegible]~~ den lange renten
driver den korte renten opp
$\Rightarrow$ dette er i samsvar med hypotesen om
forholdet mellom lange og korte renter.

NTNU

Kandidat nr./Candidate no. 10000

Dato/Date: 13.12.13 Side/Page: 35

Emnekode/Subject: FEN3001 Antall ark/Number of pages: 38

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

MA(q)-prosess q: // Oppgave 5 //

$y_t = \mu + \sum_{i=1} \theta_i u_{t-i} + u_t$

/ Litt generelt om MA(q) og AR(p)-prosessene.

MA(q) prosess består at et prosenttall gjennomsnitt + en vektet sum av q tidligere støy. Prosessen har en hukommelse på q lag.

setter $\mu = 0$

MA(4)

$y_t = \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \theta_3 u_{t-3} + \theta_4 u_{t-4} + u_t$

$E[y_t] = \sum \theta_i E[u_{t-i}] + E[u_t] = 0$ når $\mu = 0$

$E[y_t] = 0$

$Var[y_t] = E[\theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \theta_3 u_{t-3} + \theta_4 u_{t-4} - E(y_t)]$

$= E[(\theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \theta_3 u_{t-3} + \theta_4 u_{t-4})^2]$

$= (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + \theta_4^2)\sigma^2$

men krysleddene er lik 0.

Autokovarians har en mer komplisert utforming.

~~$\gamma_s = \{ \theta_1 0$~~

$\gamma_1 = E[(y_t - E y_t)(y_{t-1} - E(y_t))]$

$= E[y_t y_{t-1}]$

~~$= [\theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots$~~

$= E[(\theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \theta_3 u_{t-3} + \theta_4 u_{t-4}) \cdot (\theta_1 u_{t-2} + \theta_2 u_{t-3} + \theta_3 u_{t-4} + \theta_4 u_{t-5})]$

$= (\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_4)\sigma^2$

$\gamma_2 = E[y_{t}, y_{t-2}] =$

$E[(\theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \theta_3 u_{t-3} + \theta_4 u_{t-4})(\theta_1 u_{t-3} + \theta_2 u_{t-4} - \dots u_{t-2})]$

$= (\theta_2 + \cancel{\theta_3} + \theta_1\theta_3 + \theta_4 \cdot \theta_2)\sigma^2$

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10000

Dato/*Date:* 13.12.13 Side/*Page:* 36

Emnekode/*Subject* FIN 3006 Antall ark/*Number of pages:* 38

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

$\gamma_3 = \sigma^2(\theta_3 + \theta_1 \cdot \theta_4) \cancel{+ \theta_2}$

$$\Rightarrow \quad \gamma_1 = (\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_4)\sigma^2$$
$$\gamma_2 = (\theta_2 + \theta_1 \cdot \theta_2 + \theta_2\theta_4)\sigma^2$$
$$\gamma_3 = (\theta_3 + \theta_1\theta_4)\sigma^2$$
$$\gamma_4 = \theta_4\sigma^2$$

Forskjellen mellom MA(4) og AR(4)

er at MA tar hensyn til tidligere restledd,

mens AR(4) tar hensyn til tidligere egne verdier.

$\Rightarrow$ vi kan oppdage forskjell ved å se på ACF og PACF.

AR

ACF: vi ha avtakende (geometrisk) form for AR(p)-prosess,

mens PACF vi ha p signifikante verdier

MA: vi ha q signifikante verdier i ACF

PACF er geometrisk avtakende.

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10000

Dato/*Date:* 13/12/13 Side/*Page:* 37

Emnekode/*Subject* FIN 3006 Antall ark/*Number of pages:* ~~38~~ 38

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Prediksjoni baseres på betinget forventning. Her ni forventer gitt dagens info:

AR(4):

$s=1$: $\hat{y}_{t,1} = E_t(y_{t+1}) = E_t[\varphi_1 y_t + \varphi_2 y_{t-1} + \varphi_3 y_{t-2} + \varphi_4 y_{t-3} + u_{t+1}]$

$= \varphi_1 \cdot y_t + \varphi_2 y_{t-1} + \varphi_3 y_{t-2} + \varphi_4 y_{t-3}$

$E(u_{t+i}) = 0$

$s=2$: $E_t(y_{t+2}) = E_t[\varphi_1 y_{t+1} + \varphi_2 y_t + \varphi_3 y_{t-1} \ldots]$

$\hat{y}_{t,2} = \varphi_1 \cdot \hat{y}_{t,1} + \varphi_2 y_t + \varphi_3 y_{t-1} + \varphi_4 y_{t-2}$

$s=3$: $E_t(y_{t+3}) = \varphi_1 \cdot \hat{y}_{t,2} + \varphi_2 \hat{y}_{t,1} + \varphi_3 y_t + \varphi_4 y_{t-1}$

$s=4$: $E_t[y_{t+4}] = \varphi_1 \cdot \hat{y}_{t,3} + \varphi_2 \hat{y}_{t,2} + \varphi_3 \hat{y}_{t,1} + \varphi_4 \cdot y_t$

$s=5$: $E_t[y_{t+5}] = \varphi_1 \cdot \hat{y}_{t,4} + \varphi_2 \cdot \hat{y}_{t,3} + \varphi_3 \cdot \hat{y}_{t,2} + \varphi_4 \cdot \hat{y}_{t,1}$

1 lang hukommelse

MA(4): $y_t = \mu + \sum_{i=1}^{4} \theta_i u_{t-i} + u_t$

$s=1$: $\hat{y}_{t,1} = E[y_{t+1}] =$ ~~$E[u_{t+1} + \theta$~~

$= E[\mu + u_{t+1} + \theta_1 u_t + \theta_2 u_{t-1} + \theta_3 u_{t-2} + \theta_4 u_{t-3}]$

$\hat{y}_{t,1} = \mu + \theta_1 u_t + \theta_2 u_{t-1} + \theta_3 u_{t-2} + \theta_4 u_{t-3}$

$s=2$: ~~$\hat{y}_{t,2} = \theta_2 u_{t-1}$~~

$\hat{y}_{t,2} = \mu + \theta_2 u_t + \theta_3 u_{t-1} + \theta_4 u_{t-2}$

$s=3$: $\hat{y}_{t,3} = \mu + \theta_3 \cdot u_t + \theta_4 u_{t-1}$

$s=4$: $\hat{y}_{t,4} = \mu + \theta_4 \cdot u_t$

$s=5$: $\hat{y}_{t,5} = \mu$

etter $s > q \Rightarrow$ MA(q) modellen predikerer gjennomsnittet.

Den gule kopien beholder du/*Please keep the yellow page*

Fagtrykk Trondheim AS 04.2013

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10000

Dato/*Date:* 131213 Side/*Page:* 38

Emnekode/*Subject* TEK3006 Antall ark/*Number of pages:* 38

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Vi ser at en AR(4) modell har en lang hukommelse også brukes nye prediksjoner på egne tidligere prediksjoner.

Med (4) må inkorporere tidligere enn i sine prediksjoner siden vi lag 9 er

etter det må vår prediksjoner kun fange opp

Gjennomsnittet av hukommelsen på 9 lags

Fagtrykk Trondheim AS 04.2013