ECONnect NTNU

Faktor

- en eksamensavis utgitt av ECONnect

Pensumsammendrag:
FIN3005 – Makrofinans

Forfatter: Martin Frøland

E-post: martinom@stud.ntnu.no

Skrevet: Høsten 2009

Antall sider: 41

Om ECONnect:

ECONnect er en frivillig studentorganisasjon for studentene på samfunnsøkonomi- og finansøkonomistudiet ved NTNU. Vi arbeider for økt faglig kompetanse blant våre studenter samt tettere kontakt med næringslivet. Det gjør vi ved å arrangere fagdager, gjesteforelesninger, bedriftspresentasjoner m.m. I dag går det ca. 200 studenter på bachelornivå (1.-3. klasse) og ca. 70 studenter på masternivå (4.-5. klasse). Studentene på masternivå er fordelt på de to linjene samfunnsøkonomi (ca. 50 stk) og finansiell økonomi (ca. 20 stk). Mer om ECONnect og aktuelle arrangementer på www.econnect-ntnu.no.

ECONnect består av følgende personer ved utgivelsestidspunkt:

Bjørn Bergholt (Leder)	bjorn@econnect-ntnu.no
Sophie S. Strømman (Bedriftsansvarlig)	sophie@econnect-ntnu.no
Maiken Weidle (Fagdagsansvarlig)	maiken@econnect-ntnu.no
Joakim Bjørkhaug (Økonomi- og IT-ansvarlig)	joakim@econnect-ntnu.no
Elise Caspersen	elise@econnect-ntnu.no
Tiril Toftedahl	tiril@econnect-ntnu.no
Louis Dieffenthaler	louis@econnect-ntnu.no
Andreas H. Jung	andreas@econnect-ntnu.no
Mari Benedikte Ellingsen	mari@econnect-ntnu.no
Herman Westrum Thorsen	herman@econnect-ntnu.no

Post- og besøksadresse:	*Organisasjonsnummer:*	*Hjemmeside:*
ECONnect, NTNU Dragvoll Institutt for samfunnsøkonomi Bygg 7, Nivå 5 7491 Trondheim	NO 994 625 314	www.econnect-ntnu.no

Merk: Alle pensumsammendrag og tekster som utgis av Faktor er skrevet av og for studenter. ECONnect står ikke ansvarlig for selve faginnholdet. Spørsmål om teksten kan rettes til tekstforfatteren.

FIN 3005 – Makrofinans

Sentrale problemstillinger:
- Hvordan fastsettes priser på finansielle aktiva?
- Er prisene "korrekte"?
- Hvordan kan vi gjenkjenne bobler eller feilprising?

DEL 1 – Grunnmodell for prissetting

i) Relativ prising → partielle likevektsmodeller

ii) Absolutt prising → generelle likevektsmodeller
Sentrale realøkonomiske variable påvirker prising

2-periode modell, en grunnleggende prisingsformel

Antar investorer som lever i to perioder, t og t+1. De investerer i periode t, og kjøper ε antall av det finansielle aktivumet. Antar videre at aktivumet gir utbetaling lik prisen i periode t+1 og utbytte/dividende, slik;

$$x_{t+1} = P_{t+1} + d_{t+1}$$

Antar så at investorene har en eksogen arbeidsinntekt i de to periodene gitt ved e_t og e_{t+1}, slik at vi kan fremstille budsjettbetingelsene for de to periodene som følger;

$$c_t = e_t - P_t\varepsilon$$

$$c_{t+1} = e_{t+1} + x_{t+1}\varepsilon$$

Antar at investorene er risikoavers, med konkav periodenytte, og definerer en forventningsoperator, E. Fremstiller da investorenes preferanser som følger:

$$U(c_t, c_{t+1}) = u(c_t) + \beta E_t\left[u(c_{t+1})\right], \qquad \text{der } 0 < \beta < 1 \text{ betegner tidspreferanser}$$

Investorenes maksimeringsproblem er nå å finne hvor mange enheter av det finansielle aktivumet de skal investere i. Matematisk blir dette som følger:

$$\max_{\varepsilon} u(e_t - P_t\varepsilon) + \beta E_t\left[u(e_{t+1} + x_{t+1}\varepsilon)\right]$$

FOB:

$$-u'(c_t)P_t + \beta E_t\left[x_{t+1}u'(c_{t+1})\right] = 0$$

Kan skrive om denne til en standard marginalbetingelse, som sier at nyttetap i periode t av å øke investeringene må være likt forventet neddiskontert nyttegevinst i periode t+1.

i) $$u'(c_t)P_t = \beta E_t\left[x_{t+1}u'(c_{t+1})\right]$$

Kan videre omformulere uttrykket til følgende;

ii) $$P_t = E_t\left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} x_{t+1}\right]$$

NB! Vi kan gjøre dette siden vi antar at konsumproblemet er løst og dermed er u(c) konstanter.

Definerer så $m_{t+1} = \beta \dfrac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$ som den stokastiske diskonteringsfaktoren (SDF). Denne transformerer fremtidig payoff til en pris idag ved å fange opp utålmodighet og risikoaversjon. Denne kan vi beregne når konsumet i begge periodene og nyttefunksjonen er kjent. FOB'en vil da se slik ut:

iii) $$P_t = E_t\left[m_{t+1}x_{t+1}\right]$$

En mer generell modell

Antagelser for denne modellen er bl.a. uendelig tidshorisont og flere finansielle aktiva.

Budsjettbetingelsen investorene står ovenfor her ser ut som følger:

$W_{t+1} = (1+R_t)(W_t + Y_t - C_t)$, der W – formue
Y – inntekt
C – konsum

Her er R definert som gjennomsnittlig avkastning på investorens investeringer;

$R_t = w_t r_t + (1-w_t) z_t$, der w – andel investert i obligasjoner
r – risikofri rente
z – stokastisk avkastning på aksjer

Maksimeringsproblemet i dette tilfellet blir som følger:

$$\max_{C_t, w_t} u(C_t, C_{t+1}) = u(C_t) + \beta E u(C_{t+1})$$

gitt at:
$$W_{t+1} = (1+R_t)(W_t + Y_t - C_t)$$
$$R_t = w_t r_t + (1-w_t) z_t$$

og at man i sluttperioden konsumerer alt man har slik at $C_{t+1} = W_{t+1}$

FOB:

i)
$$\frac{\partial u}{\partial C_t} = u'(C_t) + \beta E\left[u'(C_{t+1})\frac{\partial C_{t+1}}{\partial C_t}\right] = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial C_t} = u'(C_t) + \beta E\left[u'(C_{t+1})\frac{\partial W_{t+1}}{\partial C_t}\right] = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial C_t} = u'(C_t) - \beta E\left[(1+R_t)u'(C_{t+1})\right] = 0$$

ii)
$$\frac{\partial u}{\partial w_t} = \beta E\left[u'(C_{t+1})\frac{\partial C_{t+1}}{\partial w_t}\right] = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial w_t} = \beta E\left[u'(C_{t+1})\frac{\partial W_{t+1}}{\partial w_t}\right] = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial w_t} = \beta E\left[u'(C_{t+1})(W_t + Y_t - C_t)\frac{\partial R_t}{\partial w_t}\right] = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial w_t} = \beta E\left[u'(C_{t+1})(W_t + Y_t - C_t)(r_t - z_t)\right] = 0$$

FOB forenkles til:

i) $u'(c_t) = \beta E_t\left[(1+R_t)u'(c_{t+1})\right]$ → konsumbeslutningen

ii) $E_t\left[(r_t - z_t)u'(c_{t+1})\right] = 0$ → porteføljebeslutningen

Tolkninger av førsteordensbetingelsene:

i) Dersom sparingen øker, dvs. at $(Y_t - C_t)$ øker, så viser venstre side av betingelsen nyttetapet som følge av redusert konsum, og høyre side viser forventet neddiskontert nyttegevinst som følge av mer avkastning i periode t+1.

ii) Siden den risikofri renta er konstant, kan vi skrive om denne betingelsen til følgende:
$$r_t E_t\left[u'(c_{t+1})\right] = E_t\left[z_t u'(c_{t+1})\right]$$
Venstre side viser forventet nyttegevinst av å øke andelen obligasjoner, mens høyre side viser forventet nyttegevinst av å øke andelen aksjer i porteføljen. Siden avkastningen på aksjer er usikker er også konsumnivået i periode t+1 usikkert.
Benytter følgende regel:

$$\mathrm{cov}(x,y) = E(x\cdot y) - E(x)\cdot E(y)$$
$$E(x\cdot y) = E(x)\cdot E(y) + \mathrm{cov}(x,y)$$

Skriver om betingelsen igjen til følgende:

$$r_t E_t\left[u'(c_{t+1})\right] = E_t(z_t)\cdot E_t\left[u'(c_{t+1})\right] + \mathrm{cov}\left[z_t, u'(c_{t+1})\right]$$
$$\left[E_t(z_t) - r_t\right]\cdot E_t\left[u'(c_{t+1})\right] = -\mathrm{cov}\left[z_t, u'(c_{t+1})\right]$$
$$\left[E_t(z_t) - r_t\right] = \frac{-\mathrm{cov}\left[z_t, u'(c_{t+1})\right]}{E_t\left[u'(c_{t+1})\right]}$$

Dette uttrykket refereres til som CCAPM (den konsumbaserte kapitalverdimodellen). Vi vet at risikopremien (forventet meravkastning på aksjer) er positiv. Dvs. at kovariansen mellom aksjeavkastning og marginalnytte av konsum i periode t+1 er negativ. Dette kommer av at dersom avkastningen øker, kan man oppnå høyere konsum i den sene perioden og da reduseres marginalnytten. Vi kan videre se på dette som at investorene krever en risikopremie for å investere i usikre aktiva, og at dersom et verdipapir er positivt korrelert med konsumet og dermed negativt korrelert med marginalnytten (siden $u''(c_t) < 0$). Da vil dette verdipapiret ha en positiv risikopremie utover den risikofri renta.

Vi har nå sett to metoder for konsumbasert verdsetting via prisen direkte i to-periode modellen, og ved å studere avkastningen i CCAPM. Skal nå se at disse to er ekvivalente. Husker da at vi i 2-periode modellen fant følgende:

$$p_t = E_t\left[m_{t+1}x_{t+1}\right], \qquad \text{hvor } m_{t+1} = \beta\frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)}$$

Videre har vi at avkastningen på verdipapiret er gitt som:

$$r_t^x = \frac{p_{t+1} + d_{t+1} - p_t}{p_t} = \frac{x_{t+1}}{p_t} - 1$$
$$\Rightarrow x_{t+1} = p_t(1 + r_t^x)$$

Ved å utnytte dette uttrykket i førsteordensbetingelsen ovenfor kan vi skrive om denne som følger:

$$p_t = E_t\left[m_{t+1}p_t(1 + r_t^x)\right]$$
$$p_t = p_t E_t\left[m_{t+1}(1 + r_t^x)\right]$$
$$1 = E_t\left[\beta\frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)}(1 + r_t^x)\right]$$
$$1 = \beta E_t\left[\frac{u'(C_{t+1})}{u'(C_t)}(1 + r_t^x)\right]$$
$$u'(C_t) = \beta E_t\left[u'(C_{t+1})(1 + r_t^x)\right]$$

I CCAPM kan vi skrive om førsteordensbetingelsene (konsum- og porteføljebeslutningene) ved å utnytte at $R_t = w_t r_t + (1 - w_t)z_t$ som følger. Tar utgangspunkt i betingelsene:

$$u'(c_t) = \beta E_t\left[(1 + R_t)u'(c_{t+1})\right] \tag{4}$$
$$E_t\left[(r_t - z_t)u'(c_{t+1})\right] = 0 \tag{5}$$

Skriver så om (4) til følgende:

$$u'(c_t) = \beta E_t\left[(1 + w_t r_t + (1 - w_t)z_t)u'(c_{t+1})\right]$$
$$u'(c_t) = \beta E_t\left[(1 + z_t + w_t(r_t - z_t))u'(c_{t+1})\right]$$
$$u'(c_t) = \beta E_t\left[(1 + z_t)u'(c_{t+1})\right] + \beta E_t\left[w_t(r_t - z_t)u'(c_{t+1})\right]$$
$$u'(c_t) = \beta E_t\left[(1 + z_t)u'(c_{t+1})\right] + \beta \cdot w_t \cdot E_t\left[(r_t - z_t)u'(c_{t+1})\right]$$

Siden vi fra (5) ser at $E_t\left[(r_t - z_t)u'(c_{t+1})\right] = 0$, kan vi forkorte dette til:

$$u'(c_t) = \beta E_t\left[(1 + z_t)u'(c_{t+1})\right] \tag{6}$$

Kan så skrive om (5) som følger:

$$r_t E_t\left[u'(c_{t+1})\right] = E_t\left[z_t u'(c_{t+1})\right]$$

Utnytter så at (6) kan skrives om til:

$$\frac{1}{\beta}u'(c_t) = E_t\left[z_t u'(c_{t+1})\right] + E_t\left[u'(c_{t+1})\right]$$
$$E_t\left[z_t u'(c_{t+1})\right] = \frac{1}{\beta}u'(c_t) - E_t\left[u'(c_{t+1})\right]$$

og kan da skrive om uttrykket fra (5) til:

$$r_t E_t\left[u'(c_{t+1})\right] = \frac{1}{\beta}u'(c_t) - E_t\left[u'(c_{t+1})\right]$$
$$u'(c_t) = \beta E_t\left[u'(c_{t+1})\right] + r_t E_t\left[u'(c_{t+1})\right]$$
$$u'(c_t) = \beta(1 + r_t)E_t\left[u'(c_{t+1})\right] \tag{7}$$

Kombinerer nå (6) og (7) ved å dele gjennom med $u'(c_t)$ og sette likt. Får da følgende:

$$1 = \beta E_t\left[(1 + z_t)\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\right] = \beta(1 + r_t)E_t\left[\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\right]$$
$$1 = E_t\left[(1 + z_t)\beta\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\right] = (1 + r_t)E_t\left[\beta\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\right]$$
$$1 = E_t\left[(1 + z_t)m_{t+1}\right] = E_t\left[(1 + r_t)m_{t+1}\right] \tag{8}$$

Intuisjonen: Avkastningen på aktiva x (her: aksjemarkedet) og det risikofrie alternativet må alle oppfylle samme førsteordensbetingelse i likevekt. I et finansmarked hvor alle aktiva kan handles fritt må alle aktiva oppfylle denne betingelsen. De blir alle priset ved hjelp av SDF (den Stokastiske DiskonteringsFaktoren).

<u>Mer struktur</u>: To vanlige forutsetninger.
For å komme lenger med modellen og førsteordensbetingelsene vi har funnet så langt må det legges mer struktur på modellen. De to vanligste forutsetningene er å anta en bestemt form på nyttefunksjonen (CRRA) og pålegge spesiell fordeling på konsumveksten.
Nyttefunksjonen: en mye brukt nyttefunksjon i makro og finans er den følgende formen;

$$u(C) = \frac{C^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma}, \qquad \text{hvor } \gamma \text{ gir et mål på risikoaversjonen.}$$

Ifølge Arrow-Pratt er et mål på relativ risikoaversjon gitt som $-C\frac{u''}{u'}$, og med denne nyttefunksjonen finner vi at $u' = C^{-\gamma}$ og $u'' = -\gamma C^{-1-\gamma}$, slik at den relative risikoaversjonen er gitt som konstanten $-C\frac{u''}{u'} = -C\frac{-\gamma C^{-1-\gamma}}{C^{-\gamma}} = \gamma$. Denne nyttefunksjonen gir også en konstant intertemporær substitusjonselastisitet, lik den inverse av risikoaversjonskoeffisienten, dvs. lik $1/\gamma$.

Konsumfordelingen: en vanlig antakelse rundt konsumet er å anta at fremtidig konsumnivå er normalfordelt, som er ekvivalent med å anta at konsumveksten er lognormalfordelt. To viktige resultater fra statistikk som trengs for å behandle denne antakelsen:

For en normalfordelt stokastisk variabel X gjelder: $Ee^X = e^{E[X]+\frac{1}{2}\mathrm{var}(X)}$
For en lognormalfordelt stokastisk variabel X gjelder: $\ln E[X] = E[\ln(X)] + \frac{1}{2}\mathrm{var}[\ln(X)]$

<u>Klassiske resultater i finans</u>:

Vi skal nå se hvordan den grunnleggende prisformelen (ligning (7)) kan brukes til å illustrere mange klassiske resultater i finans.

Den risikofrie renta:

Antar nå at vi har CRRA (constant relative risk aversion) nytte og at fremtidig konsum er normalfordelt. Da kan vi skrive om (7) som følger:

$$u'(c_t) = \beta(1+r_t)E_t\left[u'(c_{t+1})\right]$$

$$c_t^{-\gamma} = \beta(1+r_t)E_t\left[c_{t+1}^{-\gamma}\right]$$

$$1 = \beta(1+r_t)E_t\left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma}\right]$$

Tar så den naturlige logaritmen til dette uttrykket og får:

$$\ln 1 = \ln\beta + \ln(1+r_t) + \ln\left(E_t\left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma}\right]\right)$$

Her har vi at $\frac{c_{t+1}}{c_t}$ er konsumveksten (+1), og med antakelsen om at denne er lognormalfordelt kan vi benytte følgende regel: $\ln\left[E(X)\right] = E\left[\ln(X)\right] + \frac{1}{2}\mathrm{var}\left[\ln(X)\right]$

Skriver da om uttrykket ovenfor til:

$$0 = \ln\beta + \ln(1+r_t) + E_t\left(\ln\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{var}\left(\ln\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma}\right)$$

Har så videre at $\ln\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma} = -\gamma\left(\ln c_{t+1} - \ln c_t\right) = -\gamma\Delta\ln c$, hvor $\Delta\ln c$ er konsumveksten, slik at vi videre får:

$$\ln(1+r_t) = -\ln\beta - \frac{1}{2}\mathrm{var}\left[-\gamma\Delta\ln c_{t+1}\right] - E\left[-\gamma\Delta\ln c_{t+1}\right]$$

$$\ln(1+r_t) = -\ln\beta - \frac{1}{2}\gamma^2\,\mathrm{var}\left[\Delta\ln c_{t+1}\right] + \gamma E\left[\Delta\ln c_{t+1}\right] \qquad (9)$$

Ut ifra (9) her kan vi identifisere flere effekter:

- Realrenta er høy hvis folk er utålmodige, dvs. hvis β er lav.
- Realrenta er høy når gjennomsnittlig konsumvekst er høy, siden høy rente gjør det lønnsomt å spare idag, slik at konsumet vris mot fremtiden. Merk at dersom intertemporær substitusjonselastisitet er lav (dvs. om γ er høy), er realrenta mer sensitiv til konsumveksten. Dersom konsumentene er lite villige til å substituere konsum over tid ved renteendringer må disse endringene være store for at de skal holde seg til en bestemt konsumbane.
- Realrenta er lav dersom variasjonen i konsumveksten er høy. Dette reflekterer *forsiktighetsmotivert sparing*. Folk (gitt denne nyttefunksjonen) responderer på økt usikkerhet ved å øke sparingen, slik at renta drives ned. Merk at dette motivet er sterkere jo mer risikoavers konsumentene er.

Et *puzzle* her er at med CRRA nytte styrer parameteren γ både intertemporær (motvilje mot konsum som varierer over tid) og risikoaversjon (motvilje mot konsum som varierer mellom realiserte tilstander). Dette er en veldig sterk link, som gir problemer med data.

Korreksjon for risiko:

I den prisbaserte modellen fant vi at $p_t = E_t\left[m_{t+1}x_{t+1}\right]$. Benytter så regelen $\text{cov}(m,x) = E(m\cdot x) - E(m)\cdot E(x)$, og skriver om uttrykket til følgende:

$$p_t = E(m_{t+1})\cdot E(x_{t+1}) + \text{cov}(m_{t+1}, x_{t+1})$$

Har så videre at en risikofri plassering kan fremstilles som: $1 = (1+r_t)E(m_{t+1})$

Dette er kun uttrykket for den prisbaserte modellen der prisen er satt lik 1 og payoff satt lik (1+r). Når vi skriver om dette til $E(m_{t+1}) = \dfrac{1}{(1+r_t)}$, kan vi kombinere dette med uttrykket ovenfor og får da:

$$p_t = \frac{E(x_{t+1})}{(1+r_t)} + \text{cov}(m_{t+1}, x_{t+1}) \tag{10}$$

Dette uttrykket viser nå hvordan prisen på et verdipapir bestemmes:

- Første ledd er nåverdien av de forventede fremtidige kontantstrømmer. Dette ville ha vært prisen på verdipapiret i en risikonøytral verden.
- Andre ledd representerer risikojustering. Det forteller at et verdipapir har høyere pris, jo høyere kovariansen er mellom aktivumets payoff og SDF.
- Merk at det er kun systematisk risiko som kompenseres i kapitalmarkedet og som fremkommer av denne kovariansen. Usystematisk risiko blir ikke kompensert da denne kan diversifiseres bort.

Dersom vi har et aktivum med cov(m, x)=0 så betyr dette at aktivumet kan ha stor usikkerhet til avkastningen uten at dette gir noen risikopremie. Dette kommer da av at denne risikoen er usystematisk og dermed kan diversifiseres bort. En annen måte å si dette på er at investorene bryr seg om volatiliteten i konsumet, ikke om volatiliteten i det enkelte aktivumet.

Vi kan lett se analogien til CCAPM ved å substituere inn for *m* i (10):

$$p_t = \frac{E(x_{t+1})}{(1+r_t)} + \text{cov}\left(\beta\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}, x_{t+1}\right)$$

$$p_t = \frac{E(x_{t+1})}{(1+r_t)} + \beta\frac{\text{cov}(u'(c_{t+1}), x_{t+1})}{u'(c_t)}$$

Avkastningsformulering:

Husk at prisingsformelen (8) gjelder for ethvert aktivum som kan handles fritt. Selv om forventet avkastning kan variere over tid, så er forventet neddiskontert avkastning alltid den samme, nemlig 1. La oss se på et vilkårlig aktiva *i*:

$$1 = E\left[m(1+r^i)\right] = E\left[m\right]E\left[(1+r^i)\right] + \operatorname{cov}\left[m,(1+r^i)\right]$$

Utnytter så begrunnelsen for (10), at $E\left(m_{t+1}\right) = \frac{1}{\left(1+r_t\right)}$, og skriver om uttrykket ovenfor til:

$$1 = E\left[m(1+r^i)\right] = \frac{1}{1+r}E\left[(1+r^i)\right] + \operatorname{cov}\left[m,(1+r^i)\right]$$

$$1+r = E\left[(1+r^i)\right] + (1+r)\operatorname{cov}\left[m,(1+r^i)\right]$$

$$E\left[(1+r^i)\right] - (1+r) = -(1+r)\operatorname{cov}\left[m,(1+r^i)\right]$$

$$E(r^i) - r = -(1+r)\operatorname{cov}\left[m,(1+r^i)\right]$$

$$E(r^i) - r = -\frac{\operatorname{cov}\left[m,(1+r^i)\right]}{E(m)}$$

$$E(r^i) - r = -\frac{\operatorname{cov}\left[\beta\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)},(1+r^i)\right]}{E\left(\beta\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\right)}$$

$$E(r^i) - r = -\frac{\frac{\beta}{u'(c_t)}\operatorname{cov}\left[u'(c_{t+1}),(1+r^i)\right]}{\frac{\beta}{u'(c_t)}E\left(u'(c_{t+1})\right)}$$

$$E(r^i) - r = -\frac{\operatorname{cov}\left[u'(c_{t+1}),(1+r^i)\right]}{E\left(u'(c_{t+1})\right)} \qquad (11)$$

Av dette uttrykket ser vi at alle aktiva har forventet avkastning lik den risikofri renta *pluss risikojustering*. Aktiva hvis forventet avkastning har positiv kovarians med konsumet (og dermed negativ kovarians med marginalnytten av konsumet) bidrar til en mer volatil konsumbane, og må derfor gi en risikopremie for at investorene skal ville holde dem. Aktiva med negativ kovarians kan ha lavere forventet avkastning enn den risikofrie renta og folk vil likevel investere i dem (tenk: forsikring).

Risikopremien i aksjemarkedet:

Antar fortsatt CRRA nytte og lognormalfordelt konsumvekst. Har da at risikofri rente er gitt ved (9) som følger:

$$\ln(1+r_t) = -\ln\beta - \frac{1}{2}\gamma^2 \operatorname{var}\left[\Delta\ln c_{t+1}\right] + \gamma E\left[\Delta\ln c_{t+1}\right] \qquad (12)$$

Tilsvarende uttrykk kan vi finne for aksjeavkastningen og risikopremien. Tar utgangspunkt i ligning (6) og utnytter forutsetningene nevnt ovenfor, og skriver om som følger:

$$u'(c_t) = \beta E_t\left[(1+z_t)u'(c_{t+1})\right]$$

$$c_t^{-\gamma} = \beta E_t\left[(1+z_t)c_{t+1}^{-\gamma}\right]$$

$$1 = \beta E_t\left[(1+z_t)\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma}\right]$$

$$\ln 1 = \ln\beta + \ln\left[E_t\left[(1+z_t)\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma}\right]\right]$$

Utnytter igjen regelen om at $\ln E[X] = E[\ln(X)] + \frac{1}{2}\mathrm{var}[\ln(X)]$, og skriver om uttrykket til:

$$0 = \ln\beta + E_t\left[\ln\left[(1+z_t)\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma}\right]\right] + \frac{1}{2}\mathrm{var}_t\left[\ln\left[(1+z_t)\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma}\right]\right]$$

$$0 = \ln\beta + E_t\left[\ln(1+z_t)\right] - \gamma E_t\left(\ln\left[\frac{c_{t+1}}{c_t}\right]\right) + \frac{1}{2}\mathrm{var}_t\left[\ln(1+z_t)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\gamma^2\,\mathrm{var}_t\left(\ln\left[\frac{c_{t+1}}{c_t}\right]\right) - \gamma\,\mathrm{cov}\left[\ln(1+z_t),\left[\frac{c_{t+1}}{c_t}\right]\right]$$

$$E_t\left[\ln(1+z_t)\right] = -\ln\beta + \gamma E_t\left(\Delta\ln(c_{t+1})\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left[\mathrm{var}_t\left[\ln(1+z_t)\right] + \gamma^2\,\mathrm{var}_t\left(\Delta\ln(c_{t+1})\right) - 2\gamma\,\mathrm{cov}\left[\ln(1+z_t),\Delta\ln(c_{t+1})\right]\right] \tag{13}$$

Trekker nå ifra uttrykket for den risikofri renta (12) fra (13) og finner risikopremien:

$$E_t\left[\ln(1+z_t)\right] - \ln(1+r_t) = -\frac{1}{2}\mathrm{var}_t\left[\ln(1+z_t)\right] + \gamma\,\mathrm{cov}\left[\ln(1+z_t),\Delta\ln(c_{t+1})\right]$$

Dette uttrykket kan forenkles ytterligere ved å utnytte at
$\ln\left[E_t(1+z_t)\right] = E_t\left[\ln(1+z_t)\right] + \frac{1}{2}\mathrm{var}_t\left[\ln(1+z_t)\right]$, slik at vi kan skrive:

$$\ln\left[E_t(1+z_t)\right] - \ln(1+r_t) = \gamma\,\mathrm{cov}\left[\ln(1+z_t),\Delta\ln(c_{t+1})\right] \tag{14}$$

Risikopremien gitt ved (14) viser her at risikopremien er lik risikoaversjonen (γ , kan tolkes som en pris på risiko) multiplisert med mengden risiko (her representert ved kovariansen mellom avkastning og konsumvekst).

Intuisjon:

Ligningene (12) og (14) gir oss en dypere forståelse av sammenhengen mellom rentenivå og avkastning i aksjemarkedet enn det den vanlige kapitalverdimodellen gjør.
La oss foreta en enkel omskriving ved å benytte regelen;

$$\mathrm{cov}(x,y) = corr(x,y)\cdot sd(x)\cdot sd(y)$$

slik at (14) kan skrives som følger:

$$\ln\left[E_t(1+z_t)\right] = \ln(1+r_t) + \gamma corr\left[\ln(1+z_t),\Delta\ln(c_{t+1})\right]\cdot\sqrt{Var_t\left[\ln(1+z_t)\right]\cdot Var_t\left[\Delta\ln(c_{t+1})\right]}$$

Av dette uttrykket ser vi følgende:

- Risikofri rente og avkastning i aksjemarkedet beveger seg i takt for gitt konsumvolatilitet og varians i aksjemarkedet. Dvs. hvis risikofri rente reduseres, så vil forventet aksjeavkastning reduseres og dermed øker dagens aksjepriser.
- Makronyheter kan ha flere virkninger. F.eks. kan en nyhet som medfører økt konsumvolatilitet (dvs. at $Var_t\left[\Delta\ln(c_{t+1})\right]$ øker) forårsake reduserte renter (risikofri rente

reduseres når denne øker. Se (12)). Når de risikofrie rentene reduseres har dette i neste omgang to effekter:

- Direkte effekt ved at forventet aksjeavkastning reduseres, og dermed øker dagens aksjekurser.
- Risikopremien øker, dvs. at dagens aksjekurser trekkes ned.

Er lave renter bra for aksjemarkedet?

- Den tradisjonelle kapitalverdimodellen indikerer dette (pga høyere meravkastning).
- Denne modellen antyder at dette kommer an på grunnen til de lave rentene.
  - Dersom disse skyldes økt usikkerhet kan det være at usikkerheten i seg selv dominerer effekten av de lave rentene.

<u>Betarepresentasjon</u>:

I finans er det en lang tradisjon for å uttrykke risikojustering ved hjelp av beta-koeffisienter. Dette kan vi gjøre også her ved å omskrive avkastningsformuleringen i utledelsen av (11) som følger:

$$E(r^i) - r = -\frac{\text{cov}\left[m,(1+r^i)\right]}{E(m)}$$

$$E(r^i) = r - \frac{\text{cov}\left[m,(1+r^i)\right]}{E(m)}$$

$$E(r^i) = r + \left(\frac{\text{cov}\left[m,(1+r^i)\right]}{\text{var}(m)}\right)\left(\frac{-\text{var}(m)}{E(m)}\right)$$

$$E(r^i) = r + \beta_{i,m} \cdot \lambda_m$$

Denne formuleringen sier at forventet avkastning på aktivum *i* er proporsjonal med dets beta-koeffisient. Koeffisienten λ_m er lik for alle aktiva og blir gjerne omtalt som *prisen på risiko* og avhenger av volatiliteten til SDF.

DEL 2 – Grunnmodellen konfronteres med data, Puzzles, alternative modeller

Ved å konfrontere grunnmodellen vi har utledet med data (se Campbell Kap. 13), finner vi at mye forklares godt med modellen, men at noe ikke stemmer like godt. Dette refereres til som såkalte *puzzles*. Noen stiliserte fakta fra Campbells data:

- Aksjemarkedene i den vestlige verden har i gjennomsnitt levert en gjennomgående høy avkastning, bedre enn 4,5% p.a. for landene i utvalget.
- Standardavviket til den gjennomsnittlige avkastningen varierer mellom 15% og 27%.
- Den ”risikofrie” renta (målt ved avkastningen på statssertifikater) ligger sjelden over 3% p.a., men det er verdt å merke at denne renta ikke alltid har vært helt risikofri.
- Ifølge Barro har vi vært vitne til en risikopremie i aksjemarkedet på rundt 7%.
- Konsumveksten ser ut til å ha vært stabil, med et standardavvik på kun 1%-2,5%.
- Korrelasjonen mellom aksjeavkastning og konsumvekst varierer mellom land. Dette reflekterer muligens den ulike betydningen aksjemarkedet har for økonomisk utvikling mellom vestlige land.

<u>The risk free interest rate puzzle</u>:

Intuisjon: Høy meravkastning i aksjemarkedet kan forklares med høy risikoaversjon (γ).

CRRA-nytte innebærer imidlertid at vi da får lav intertemporær substitusjonselastisitet, dvs. at folk generelt har liten vilje til å ”flytte” konsum over tid. Fra data finner vi at risikoaversjonen er høy og at dette forklarer meravkastningen, men at konsumveksten er stabil. Dette stemmer med intuisjonen om at risikoaverse investorer krever høy meravkastning (risikopremie) fra aksjer og

at de ønsker stabilitet i konsumet over tid. Problemet er at vi observerer konsumvekst, og at dette kan forklares med høy tidspreferanserate, β, som innebærer at man vektlegger fremtidig konsum sterkere enn dagens konsum. Dette bryter med forutsetningene for modellen og med hva som er konsensus rundt nyttefunksjonen (nemlig at $0 < \beta < 1$).
I modellen med CRRA-nytte og lognormalfordelt konsumvekst fant vi følgende uttrykk for den risikofri renta:

$$\ln(1+r_t) = -\ln\beta - \frac{1}{2}\gamma^2 \operatorname{var}\left[\Delta \ln c_{t+1}\right] + \gamma E\left[\Delta \ln c_{t+1}\right]$$

Gitt den verdien på γ som kreves for å forklare risikopremien i aksjemarkedet kan vi finne den verdien på β som matcher dataene. I de fleste tilfellene fra Campbells data finner vi at $\beta > 1$, noe som innebærer at tidspreferanserater som er svært nær null eller til og med negative. Dette er lite plausibelt, og derfor er dette et såkalt puzzle.

<u>The equity premium puzzle</u>:
La oss se nærmere på uttrykket for risikopremien i ligning (14):

$$\ln\left[E_t(1+z_t)\right] - \ln(1+r_t) = \gamma \operatorname{cov}\left[\ln(1+z_t), \Delta\ln(c_{t+1})\right]$$

Ved å løse dette uttrykket for γ, kan vi finne et uttrykk for relativ risikoaversjon forklart av modellen:

$$\gamma = \frac{\ln\left[E_t(1+z_t)\right] - \ln(1+r_t)}{\operatorname{cov}\left[\ln(1+z_t), \Delta\ln(c_{t+1})\right]}$$

Dataene til Campbell viser at for alle landene i utvalget ligger disse verdiene for den relative risikoaversjonen fra 10 og oppover. Ifølge de fleste økonomer er 10 et absolutt maksimum på relativ risikoaversjon. Dette problemet er referert til som *the equity premium puzzle*.

<u>Noen forsøk på løsninger av puzzles</u>:
Separering av risikoaversjon og intertemporær substitusjon:
En problematisk egenskap ved CRRA nyttefunksjonen er den tette linken mellom riskoaversjon og den intertemporære substitusjonselastisiteten. Epstein-Zin preferanser beholder mange av de attraktive egenskapene men bryter dette tette forholdet. Lar nå γ fortsatt betegne den relative risikoaversjonen, men lar ψ betegne den representative aktørs intertemporære substitusjonselastisitet. Denne nyttefunksjonen kan presenteres slik:

$$U_t = \left[(1-\beta)c_t^{\frac{1-\gamma}{\theta}} + \beta\left(E_t U_{t+1}^{\frac{1}{\theta}}\right)\right]^{\frac{\theta}{1-\gamma}}$$

Antar her at $\theta \equiv \frac{(1-\gamma)}{\left(1-\frac{1}{\psi}\right)}$, slik at dersom $\gamma = \frac{1}{\psi}$ kan denne nyttefunksjonen reduseres til CRRA nyttefunksjonen.
Resultater fra denne nytteformuleringen er:

- Høy risikoaversjon trenger ikke lenger bety høy rente (eller negativ tidspreferanserate, dvs. $\delta \le 0 \Rightarrow \beta \ge 1$). Her trenger nå ikke ψ være liten selv om γ er stor. Dette kan da forklare konsumveksten uten negativ tidspreferanserate. Problemet blir nå at de empiriske verdiene for den intertemporære substitusjonselastisiteten, ψ, er lave.

Vanedanning:

Eksempel på dette kan være at $c_t = 100$ gir høyere nytte dersom $c_{t-1} = 80$ enn dersom $c_{t-1} = 90$. Dette kommer av at man legger sine tidligere nyttenivåer til grunne når man vurderer kommende nytte. Intuisjonen bak dette er at man kan forklare konsumveksten med vanedanning istedet for høy diskonteringsfaktor, β. Det kan videre vises at det oppstår et problem ved at vanedanning vil forårsake store svingninger i realrenta, og dette er svingninger som ikke observeres i data.

Korte dataserier:
Selv om vi for enkelte markeder har dataserier som strekker seg over mer enn 100 år, er fortsatt den statistiske usikkerheten til estimerte serier stor.

Overlevelsesskjevhet og katastroferisiko:
Vi bruker data fra markeder som har overlevd og vokst i løpet av det forrige århundret. Hva med markeder som ikke har klart seg. Vil inkludering av disse endre datasettet vårt?
Ved å overse risikoen for katastrofale begivenheter (finanskriser, depresjoner, verdenskriger, masseødeleggelsesvåpen, jordskjelv, tsunamier, asteroidekollisjon, svartedauden, fugleinfluensa etc), så overser vi potensielt en stor risikokilde, og dermed overestimerer vi meravkastningen til aksjeinvesteringer.
Dette inkluderes i modellen basert på Lucas' (1978) asset-pricing model.

”Lucas-modellen”:
Antar her en bytteøkonomi, dvs. hvor produksjonen i hver periode er eksogen og ikke kan lagres. Betegner så produksjonen i periode *t* med A_t. Med en lukket økonomi betyr dette i likevekt at all produksjon går til konsum, slik at også konsumet er eksogent. Dermed kan vi benytte Euler-ligningene (dvs. førsteordensbetingelsene for optimalt konsum) til å verdsette aktiva som en funksjon av eksogent konsum.
Antar så at vi kan velge mellom to aktiva i enhver periode:

- Aksjemarkedet gir krav på produksjonen. Bruttoavkastning her er gitt ved $R_{t1}^e = \dfrac{A_{t+1}}{P_{t1}}$.
- Risikofritt alternativ med bruttoavkastning lik R_{t1}^f.

Definerer her ρ som en subjektiv diskonteringsrate, og formulerer nyttefunksjonen slik:

$$U_t = E_t\left[\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\rho i}\left(\frac{C_{t+i}^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right)\right],$$

der vi har at $e^{-\rho i}$ utgjør det vi tidligere kalte β, og brøken med konsumparameteren er lik den vi hadde da vi definerte CRRA-nytte.

Vi vet så videre at for alle aktiva som kan handles i periode *t* gjelder Euler-ligningen:

$$u'(C_t) = e^{-\rho}E_t\left[u'(C_{t+1})\cdot R_{t1}^e\right]$$

Ved å utnytte CRRA-nytte (dvs. at $u'(C_t) = C_t^{-\theta}$) og at vi har en lukket bytteøkonomi (dvs. at $C_t = A_t$), kan vi skrive om Euler-ligningen til et uttrykk med produksjon:

$$A_t^{-\theta} = e^{-\rho}E_t\left[A_{t+1}^{-\theta}\cdot R_{t1}^e\right]$$

$$A_t^{-\theta} = e^{-\rho}E_t\left[A_{t+1}^{-\theta}\cdot \frac{A_{t+1}}{P_t}\right]$$

$$P_tA_t^{-\theta} = e^{-\rho}E_t\left[A_{t+1}^{1-\theta}\right]$$

$$P_t = e^{-\rho}A_t^{\theta}E_t\left[A_{t+1}^{1-\theta}\right] \qquad (15)$$

Ligning (15) her gir et uttrykk for aksjeprisen i periode *t* som funksjon av produksjon idag og forventet produksjon i neste periode.

Vi trenger nå en produktfunksjon, og antar at denne kan representeres som følger:

$$A_{t+1} = A_t e^{\gamma} e^{u_{t+1}} e^{v_{t+1}} \tag{16}$$

Her har vi at produksjonen avhenger av produksjonen i perioden før, en trendvekst i produksjonen samt noen stokastiske sjokk. Nærmere spesifisert har vi at:

γ - parameter for konstant trendvekst

u_{t+1} - hvit støy (eks. Konjunktursvingninger). Antar at denne er $\sim N\left(0,\sigma^2\right)$.

v_{t+1} - katastrofeparameter. Påvirkningskraft på produksjonen av eventuelle katastrofehendelser. Antar at denne har følgende egenskaper:

$$v_{t+1} = \begin{cases} 0 & ssh\ e^{-p} \\ \ln(1-b) & ssh\ (1\text{-}e^{-p}) \end{cases}$$

Dette innebærer at dersom $\begin{matrix} p = 0 \Rightarrow e^{-p} = 1 \\ p \to \infty \Rightarrow e^{-p} \to 0 \end{matrix}$

Og at dersom en katastrofe skulle inntreffe, så reduseres produksjonen med en faktor b. Sammenlign siste leddet i (16) med og uten katastrofeinntreffelse:

$$A_{t+1} = A_t e^{\gamma} e^{u_{t+1}} (1-b) \text{ vs } A_{t+1} = A_t e^{\gamma} e^{u_{t+1}}$$

Ta nå den naturlige logaritmen til produktfunksjonen (16):

$$\ln A_{t+1} = \ln A_t + \gamma + u_{t+1} + v_{t+1}$$

$$\Delta \ln A_{t+1} = \gamma + u_{t+1} + v_{t+1} \tag{17}$$

Et estimat på b, basert på empiri, er 0,4. Det er imidlertid en veldig liten sannsynlighet for at noe inntreffer slik at produksjonen reduseres med hele 40%. Derfor velger vi i første omgang å se på en benchmark situasjon uten katastroferisiko. Dvs. at vi kutter bort det siste leddet i ligning (17).

<u>Benchmark: ingen katastroferisiko</u>:

Benytter da en liten forenkling av produktfunksjonen (16), og setter denne inn i prisligningen for aksjeavkastning gitt ved ligning (15).

Dvs. $A_{t+1} = A_t e^{\gamma + u_{t+1}}$ inn i $P_t = e^{-\rho} A_t^{\theta} E_t \left[A_{t+1}^{1-\theta} \right]$

$$\Rightarrow P_t = e^{-\rho} A_t^{\theta} E_t \left[\left(A_t e^{\gamma + u_{t+1}} \right)^{1-\theta} \right]$$

$$P_t = e^{-\rho} A_t E_t \left[e^{(\gamma + u_{t+1})(1-\theta)} \right]$$

$$P_t = e^{\gamma(1-\theta)-\rho} A_t E_t \left[e^{u_{t+1}(1-\theta)} \right]$$

Dersom en uavhengig variabel, X, er normalfordelt, så er: $E\left(e^X\right) = e^{E(X) + \frac{1}{2}\operatorname{var}(X)}$.

Utnytter så at $u_{t+1} \sim N\left(0,\sigma^2\right)$, slik at vi kan skrive om uttrykket til:

$$P_t = e^{\gamma(1-\theta)-\rho} A_t e^{E\left(u_{t+1}(1-\theta)\right) + \frac{1}{2}\operatorname{var}\left(u_{t+1}(1-\theta)\right)}$$

$$P_t = e^{\gamma(1-\theta)-\rho} A_t e^{E\left(u_{t+1}\right) \cdot E(1-\theta) + \frac{1}{2}(1-\theta)^2 \operatorname{var}\left(u_{t+1}\right)}$$

$$P_t = e^{\gamma(1-\theta)-\rho} A_t e^{\frac{1}{2}(1-\theta)^2 \sigma^2}$$

$$P_t = A_t \cdot e^{\gamma(1-\theta) - \rho + \frac{1}{2}(1-\theta)^2 \sigma^2} \tag{18}$$

Ligning (18) gir her et endelig uttrykk for prisen i aksjemarkedet idag som funksjon av tidspreferanserate, risikoaversjon, konjunkturrisiko (gitt ved variansen til parameteren u, σ^2) og av dagens produksjonsnivå.

Siden vi har at $E\left[A_{t+1}\right] = E\left[A_t e^{\gamma+u_{t+1}}\right] = A_t e^{\gamma} e^{E(u_{t+1})+\frac{1}{2}\operatorname{var}(u_{t+1})} = A_t e^{\gamma+\frac{1}{2}\sigma^2}$, kan avkastningen i aksjemarkedet nå representeres ved følgende uttrykk:

$$E\left[R_t^e\right] = \frac{E\left[A_{t+1}\right]}{P_t} = \frac{A_t e^{\gamma+\frac{1}{2}\sigma^2}}{A_t \cdot e^{\gamma(1-\theta)-\rho+\frac{1}{2}(1-\theta)^2\sigma^2}} = e^{\gamma+\frac{1}{2}\sigma^2-\left[\gamma(1-\theta)-\rho+\frac{1}{2}(1-\theta)^2\sigma^2\right]} = e^{\rho+\gamma\theta-\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2+\theta\sigma^2}$$

Tar nå den naturlige logaritmen til bruttoavkastningen og får et penere uttrykk:

$$\ln\left(E\left[R_t^e\right]\right) = \rho + \gamma\theta - \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2 + \theta\sigma^2 \tag{19}$$

Dette minner mye om CCAPM gitt ved (13). Husk at denne var gitt som:

$$E_t\left[\ln(1+z_t)\right] = -\ln\beta + \gamma E_t\left(\Delta\ln(c_{t+1})\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left[\operatorname{var}_t\left[\ln(1+z_t)\right] + \gamma^2 \operatorname{var}_t\left(\Delta\ln(c_{t+1})\right) - 2\gamma\operatorname{cov}\left[\ln(1+z_t),\Delta\ln(c_{t+1})\right]\right]$$

Vi kan nå sammenligne ved å se følgende linker:

$$-\ln\beta \Leftrightarrow \rho$$
$$\gamma E_t\left(\Delta\ln(c_{t+1})\right) \Leftrightarrow \gamma\theta$$
$$\gamma^2 \operatorname{var}_t\left(\Delta\ln(c_{t+1})\right) \Leftrightarrow \theta^2\sigma^2$$
$$\gamma\operatorname{cov}\left[\ln(1+z_t),\Delta\ln(c_{t+1})\right] \Leftrightarrow \theta\sigma^2$$

Vi kan ikke finne igjen leddet $-\frac{1}{2}\operatorname{var}_t\left[\ln(1+z_t)\right]$ i (19), men dette kommer kun av en omskrivning. Merk $\ln\left(E\left[R_t^e\right]\right)$ vs $E_t\left[\ln(1+z_t)\right]$. Ved å skrive CCAPM på samme form finner vi at $E_t\left[\ln(1+z_t)\right] = \ln\left[E_t(1+z_t)\right] - \frac{1}{2}\operatorname{var}\left[\ln(1+z_t)\right]$, og dermed faller dette leddet bort.

Slik modellen vår er gitt i (19) er den pålagt mer struktur enn standardmodellen.

Ser nå på den risikofri renta med denne tilnærmingen. Tar da utgangspunkt i Euler-ligningen:

$$u'(C_t) = e^{-\rho} R_t^f E_t\left[u'(C_{t+1})\right]$$

Utnytter så de samme forutsetningene om produktfunksjonen, bytteøkonomi og CRRA-nytte:

$$A_t^{-\theta} = e^{-\rho} R_t^f E_t\left[A_{t+1}^{-\theta}\right]$$
$$A_t^{-\theta} = e^{-\rho} R_t^f E_t\left[A_t^{-\theta} e^{(\gamma+u_{t+1})(-\theta)}\right]$$
$$A_t^{-\theta} = e^{-\rho} R_t^f A_t^{-\theta} e^{-\theta\gamma} E_t\left[e^{-\theta u_{t+1}}\right]$$
$$1 = e^{-\rho} R_t^f e^{-\theta\gamma} e^{E(-\theta u_{t+1})+\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2}$$
$$1 = e^{-\rho} R_t^f e^{-\theta\gamma} e^{E(-\theta u_{t+1})+\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2}$$
$$1 = R_t^f e^{-\rho-\theta\gamma+\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2}$$
$$R_t^f = e^{\rho+\theta\gamma-\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2}$$

Tar så den naturlige logaritmen til dette uttrykket og får da:

$$\ln\left[R_t^f\right] = \rho + \theta\gamma - \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2$$

Dette ligner også på uttrykket fra CCAPM gitt i ligning (12) som:

$$\ln(1+r_t) = -\ln\beta - \frac{1}{2}\gamma^2 \operatorname{var}\left[\Delta \ln c_{t+1}\right] + \gamma E\left[\Delta \ln c_{t+1}\right]$$

Har her følgende linker:

$$-\ln\beta \Leftrightarrow \rho$$

$$\gamma^2 \operatorname{var}\left[\Delta \ln c_{t+1}\right] \Leftrightarrow \theta^2\sigma^2$$

$$\gamma E\left[\Delta \ln c_{t+1}\right] \Leftrightarrow \theta\gamma$$

Konklusjoner vi foreløpig kan trekke er at Lucas spesifiserer resten av økonomien (f.eks. med produktfunksjon), men uttrykkene stemmer likevel overens med CCAPM. Konsumvekst er lik produksjonsveksten.

Risikopremien i denne modellen er nå gitt som:

$$e_p = \ln\left[E_t\left(R_t^e\right)\right] - \ln\left[R_t^f\right] = \theta\sigma^2$$

Husk at denne i CCAPM er gitt ved (14) som:

$$\ln\left[E_t(1+z_t)\right] - \ln(1+r_t) = \gamma \operatorname{cov}\left[\ln(1+z_t), \Delta \ln(c_{t+1})\right]$$

Dette er også ekvivalent, hvilket betyr at vi kommer frem til samme resultat selv med mer struktur pålagt modellen. Merk også at: $\ln\left[R_t^e\right] = \ln\left[1 + r_t^e\right] \approx r_t^e$

Konfrontasjon med data (ref. Tabell 5 i Barro's artikkel):

Dataene til Barro antyder følgende parameterverdier:

$$\theta = 4 \qquad \rho = 0{,}03$$

$$\sigma = 0{,}02 \qquad \gamma = 0{,}025$$

Dette innbærer følgende resultater fra modellen:

$$\ln\left[E_t\left(R_t^e\right)\right] = 0{,}1284 = 12{,}84\%$$

$$\ln\left[R_t^f\right] = 0{,}1268 = 12{,}68\%$$

$$e_p = 0{,}16\%$$

Disse dataene antyder en svært liten risikopremie, samt en meget høy risikofri rente. Dette stemmer ikke overens med observerte data, og gir dermed fortsatt et *equity premium puzzle*.

Inkluderer katastroferisiko:

Har at produksjonen er gitt ved uttrykket i (16):

$$A_{t+1} = A_t e^{\gamma} e^{u_{t+1}} e^{v_{t+1}}$$

Aksjeprisen er gitt ved (15) som:

$$P_t = e^{-\rho} A_t^{\theta} E_t\left[A_{t+1}^{1-\theta}\right]$$

Aksjeavkastningen er da fortsatt definert ved:

$$E\left[R_t^e\right] = \frac{E\left[A_{t+1}\right]}{P_t}$$

Antar fortsatt følgende egenskaper ved parameterne:

$$u_{t+1} \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$

$$\operatorname{cov}\left(u_{t+1}, v_{t+1}\right) = 0$$

$$v_{t+1} = \begin{cases} 0 & \text{m/ssh e}^{-p} \quad \text{dvs e}^{v_{t+1}} = e^0 = 1 \\ \ln(1-b) & \text{m/ssh (1-e}^{-p}) \quad \text{dvs e}^{v_{t+1}} = e^{\ln(1-b)} = 1-b \end{cases}$$

Gitt disse egenskapene, kan vi ta forventningsverdien til fremtidig produksjon:

$$E_t\left[A_{t+1}\right] = E_t\left[A_t e^{\gamma} e^{u_{t+1}} e^{v_{t+1}}\right]$$

$$E_t\left[A_{t+1}\right] = A_t e^{\gamma} E_t\left[e^{u_{t+1}} e^{v_{t+1}}\right]$$

$$E_t\left[A_{t+1}\right] = A_t e^{\gamma} E_t\left[e^{u_{t+1}}\right] \cdot E_t\left[e^{v_{t+1}}\right]$$

$$E_t\left[A_{t+1}\right] = A_t e^{\gamma} e^{E(u_{t+1})+\frac{1}{2}\operatorname{var}(u_{t+1})}\left[e^{-p} \cdot e^0 + \left(1-e^{-p}\right)\left(1-b\right)\right]$$

$$E_t\left[A_{t+1}\right] = A_t e^{\gamma} e^{\frac{1}{2}\sigma^2}\left[e^{-p} + \left(1-e^{-p}\right)\left(1-b\right)\right] \tag{20}$$

For å komme frem til uttrykket for aksjeprisen må vi finne et uttrykk for $E_t\left[A_{t+1}^{1-\theta}\right]$.

$$A_{t+1}^{1-\theta} = A_t^{1-\theta} e^{(1-\theta)\gamma} e^{(1-\theta)u_{t+1}} e^{(1-\theta)v_{t+1}}$$

$$E_t\left[A_{t+1}^{1-\theta}\right] = A_t^{(1-\theta)} e^{(1-\theta)\gamma} e^{\frac{1}{2}(1-\theta)^2\sigma^2}\left[e^{-p} + \left(1-e^{-p}\right)\left(1-b\right)^{(1-\theta)}\right]$$

Setter så inn dette i uttrykket for aksjepris:

$$P_t = e^{-\rho} A_t^{\theta} A_t^{(1-\theta)} e^{(1-\theta)\gamma} e^{\frac{1}{2}(1-\theta)^2\sigma^2}\left[e^{-p} + \left(1-e^{-p}\right)\left(1-b\right)^{(1-\theta)}\right]$$

$$P_t = A_t e^{-\rho+(1-\theta)\gamma+\frac{1}{2}(1-\theta)^2\sigma^2}\left[e^{-p} + \left(1-e^{-p}\right)\left(1-b\right)^{(1-\theta)}\right] \tag{21}$$

Ser her at forskjellen, som kommer av katastroferisiko, fra (18) er det siste leddet. Hva gjør dette med aksjeprisen? Dette kommer an på størrelsen av risikoaversjonskoeffisienten, θ:

- Siden parentesen er et veid snitt av 1 og $\left(1-b\right)^{(1-\theta)}$, så kan vi se at:
  - Hvis $\theta > 1$ så er $\left(1-b\right)^{(1-\theta)} > 1$ og aksjeprisen øker som følge av inkludering av katastroferisiko.
  - Hvis derimot $\theta < 1$ så er $\left(1-b\right)^{(1-\theta)} < 1$ og aksjeprisen reduseres.

  To effekter på aksjeprisene:

  i) Investorene vrir porteføljesammensetning mot det risikofrie alternativet. Dvs. at etterspørselen etter aksjer reduseres og prisene går ned.

  ii) Økt sparing som følge av økt usikkerhet vil bidra til økt etterspørsel etter aksjer slik at prisene øker.

Titter så på forventet avkastning på aksjer:

$$E\left[R_t^e\right] = \frac{E\left[A_{t+1}\right]}{P_t} = \frac{A_t e^{\gamma} e^{\frac{1}{2}\sigma^2}\left[e^{-p} + \left(1-e^{-p}\right)\left(1-b\right)\right]}{A_t e^{-\rho+(1-\theta)\gamma+\frac{1}{2}(1-\theta)^2\sigma^2}\left[e^{-p} + \left(1-e^{-p}\right)\left(1-b\right)^{(1-\theta)}\right]}$$

$$E\left[R_t^e\right] = e^{\gamma+\frac{1}{2}\sigma^2+\rho-(1-\theta)\gamma-\frac{1}{2}(1-\theta)^2\sigma^2}\;\frac{e^{-p} + \left(1-e^{-p}\right)\left(1-b\right)}{e^{-p} + \left(1-e^{-p}\right)\left(1-b\right)^{(1-\theta)}}$$

$$E\left[R_t^e\right] = e^{\rho+\theta\gamma+\theta\sigma^2-\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2}\;\frac{e^{-p} + \left(1-e^{-p}\right)\left(1-b\right)}{e^{-p} + \left(1-e^{-p}\right)\left(1-b\right)^{(1-\theta)}} \tag{22}$$

Forskjellen i forventet bruttoavkastning som følge av at vi inkluderer katastroferisiko er gitt ved det siste leddet (brøken) i ligning (22).

Gitt at $\theta > 1$, så vil $(1-b)^{(1-\theta)} > (1-b)$, dvs. at katastroferisiko reduserer forventet avkastning.
Merk at logaritmen til bruttoavkastning er tilnærmet lik netto avkastning, slik at vi kan skrive:

$$\ln E\left[R_t^e\right] = \ln\left[e^{\rho+\theta\gamma+\theta\sigma^2-\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2}\frac{e^{-p}+\left(1-e^{-p}\right)(1-b)}{e^{-p}+\left(1-e^{-p}\right)(1-b)^{(1-\theta)}}\right]$$

$$\ln E\left[R_t^e\right] = \rho+\theta\gamma+\theta\sigma^2-\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2+\ln\left[e^{-p}+\left(1-e^{-p}\right)(1-b)\right]-\ln\left[e^{-p}+\left(1-e^{-p}\right)(1-b)^{(1-\theta)}\right]$$

Kan så benytte en førsteordens Taylor-approksimasjon for de to siste leddene her, slik at vi får et penere uttrykk for netto avkastning:

1. ordens Taylor-approksimasjon for en generell funksjon g(p) rundt g(0) er gitt ved g(0) + g'(0)p

I dette tilfellet har vi da at:

$$g(p) = \ln\left[e^{-p}+\left(1-e^{-p}\right)(1-b)^{(1-\theta)}\right]$$

$$g(0) = \ln\left[e^{0}+\left(1-e^{0}\right)(1-b)^{(1-\theta)}\right] = \ln[1+0] = 0$$

Og dermed at:

$$g'(p) = \frac{-e^{-p}+e^{-p}(1-b)^{(1-\theta)}}{e^{-p}+\left(1-e^{-p}\right)(1-b)}$$

$$g'(0) = \frac{-e^{0}+e^{0}(1-b)^{(1-\theta)}}{e^{0}+\left(1-e^{0}\right)(1-b)} = (1-b)^{(1-\theta)}-1$$

Kan dermed skrive approksimasjonen av de to siste leddene i uttrykket ovenfor som hhv:

$$\ln\left[e^{-p}+\left(1-e^{-p}\right)(1-b)\right] \approx -bp$$

og

$$\ln\left[e^{-p}+\left(1-e^{-p}\right)(1-b)^{(1-\theta)}\right] \approx 0+\left[(1-b)^{(1-\theta)}-1\right]p$$

Ved å benytte disse approksimasjonene kan vi skrive om uttrykket ovenfor til:

$$\ln E\left[R_t^e\right] = \rho+\theta\gamma+\theta\sigma^2-\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2-bp-\left[(1-b)^{(1-\theta)}-1\right]p$$

$$\ln E\left[R_t^e\right] = \rho+\theta\gamma+\theta\sigma^2-\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2-p(1-b)\left[(1-b)^{-\theta}-1\right] \tag{23}$$

Ser så på obligasjonsavkastningen for å få et mål på den risikofri renta:
Antar dermed implisitt at det ikke eksisterer noen risiko for default, dvs. at skriveren av obligasjonene ikke betaler for seg.
Tar utgangspunkt i Euler-ligningen:

$$A_t^{-\theta} = e^{-\rho}R_t^f E_t\left[A_{t+1}^{-\theta}\right]$$

Finner så et uttrykk for $E_t\left[A_{t+1}^{-\theta}\right]$ på følgende måte:

$$A_{t+1}^{-\theta} = A_t^{-\theta}e^{-\theta\gamma}e^{-\theta u_{t+1}}e^{-\theta v_{t+1}}$$

$$E_t\left[A_{t+1}^{-\theta}\right] = A_t^{-\theta}e^{-\theta\gamma+\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2}\left[e^{-p}+\left(1-e^{-p}\right)(1-b)^{-\theta}\right]$$

Setter så inn dette i Euler ligningen:

$$A_t^{-\theta} = e^{-\rho} R_t^f A_t^{-\theta} e^{-\theta\gamma+\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2} \left[e^{-p} + \left(1-e^{-p}\right)\left(1-b\right)^{-\theta} \right]$$

$$A_t^{-\theta} = R_t^f A_t^{-\theta} e^{-\rho-\theta\gamma+\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2} \left[e^{-p} + \left(1-e^{-p}\right)\left(1-b\right)^{-\theta} \right]$$

$$R_t^f = e^{\rho+\theta\gamma-\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2} \left[e^{-p} + \left(1-e^{-p}\right)\left(1-b\right)^{-\theta} \right]^{-1}$$

Tar så logaritmen til denne risikofri bruttoavkastningen, og får da risikofri netto avkastning:

$$\ln R_t^f = \rho + \theta\gamma - \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2 - \ln\left[e^{-p} + \left(1-e^{-p}\right)\left(1-b\right)^{-\theta} \right]$$

Benytter så en førsteordens Taylor approksimasjon også her:

$$\ln R_t^f = \rho + \theta\gamma - \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2 - p\left[\left(1-b\right)^{-\theta} - 1 \right] \tag{24}$$

Kan her se at (gitt at $\theta > 1$) den risikofrie renta også er redusert som følge av inkluderingen av katastroferisiko. Kan også se at denne reduseres mer enn aksjeavkastningen gjorde.
Vi har også her to effekter:

i) Vridning i porteføljesammensetningen fra aksjer mot obligasjoner. Dette innebærer økt etterspørsel etter obligasjoner, som gir økte priser og dermed redusert avkastning.

ii) Økt sparing (som følge av økt usikkerhet) gir generelt økt etterspørsel etter sparealternativer (både aksjer og obligasjoner). Dette gir økte priser og reduserer avkastningen.

Vi kan nå se at risikopremien øker. Denne er gitt ved differansen mellom (23) og (24):

$$Risikopremie = \theta\sigma^2 + pb\left[\left(1-b\right)^{-\theta} - 1 \right]$$

<u>Kalibrering av modellen</u>:
Fra Barro har vi følgende parameterverdier:

$\theta = 4$	$\gamma = 0{,}025$
$\sigma = 0{,}02$	$p = 0{,}017$
$\rho = 0{,}03$	$b = 0{,}4$

Parameterverdien b=0,4 innebærer at ved en katastrofe vil BNP reduseres med 40%.
Gitt disse parameterverdiene har vi følgende:

Forventet aksjeavkastning:	5,99%
Risikofri rente:	1,26%
Forventet risikopremie:	4,73%

Denne modellen <u>kan</u> forklare *the equity premium puzzle*.

Behavioral Finance

Dette er en fellesbetegnelse på teori som forsøker å forklare finansielle fenomener hvor aktørene ikke er fullt ut rasjonelle. Det forskes mye på området som er en del av det større temaet *behavioral economics*. Området baserer seg på to grunnpilarer, "*grenser for arbitrasje*" og psykologi.
<u>Ikke-rasjonalitet og arbitrasje</u>:
En av de viktigste prediksjonene fra finansteori med rasjonelle aktører er at priser i finansmarkedene reflekterer "fundamentale" forhold: Markedene er <u>effisiente</u>. Argumentet hviler på at priser som avviker

fra sin fundamentalverdi vil bli korrigert ved *arbitrasje* fra rasjonelle investorer. Dette argumentet hviler igjen på to antagelser:

- Så fort det er et avvik fra fundamentale forhold (dvs. vi har feilprising) så skapes en attraktiv investeringsmulighet.
- Rasjonelle investorer vil raskt utnytte muligheten, og dermed korrigeres feilprisingen.

Behavioral finance argumenterer for at første del av denne logikken er feil. Feilprising skaper ikke nødvendigvis en attraktiv investeringsmulighet fordi den kan være risikofylt og det kan være kostbart å utnytte feilprisingen. Dermed åpner man for muligheten at vi kan ha store og langvarige avvik fra "fundamentale" priser.

Vi skal nå se nærmere på en modell som tar hensyn til to typer investorer;

- Rasjonelle investorer som søker å utnytte arbitrasjemuligheter.
- Såkalte *Noise traders* som opererer uavhengig av fundamentale størrelser. Dette dreier seg f.eks. om investorer som blindt baserer sine investeringer på medieomtale, råd fra meglere etc.

I slike tilfeller står de rasjonelle investorene ovenfor en "*Noise trader risiko*" i tillegg til den fundamentale risikoen. Denne "nye" risikoen kan være at en feilprising som forsøkes utnyttet av de rasjonelle investorene blir forverret på kort sikt som følge av noise trader aktivitet. Det er derfor viktig å merke seg at rasjonelle investorer av denne grunn ikke alltid vil ønske å utnytte seg av arbitrasjemuligheter selv om de ser at de er til stede.

<u>Noise-trader modell (Schleifer; *Inefficient markets*, kap. 2)</u>:

Grunnlaget for modellen:

- Hva om vi har begrenset arbitrasjeaktivitet?
- Hva om noen investorer er irrasjonelle og opererer i flokk?

Sentrale forutsetninger:

- Rasjonelle aktører har risikoaversjon og kort investeringshorisont. Dette ser ut til å være en rimelig forutsetning siden:
  - Det er begrensninger på short-salg.
  - Fondsforvaltere evalueres og avlønnes basert på korte perioder.
  - Begrenset informasjon mellom investorer og forvaltere.
- Noise-traders har feil oppfatning om fremtidig pris. Denne feiloppfatningen varierer over tid. Lar ρ_t være feiloppfatningen i periode *t* om prisen i periode *t*+1, $\rho_t = E\rho_{t+1}$. Antar at feiloppfatningen er normalfordelt, $\rho_t \sim N\left(\rho^*, \sigma_\rho^2\right)$. Fenomenet noise traders virker også rimelig siden:
  - Dette kan forklare bobler.
  - Det eksisterer mye kvasi-informasjon (meglerråd, finanspressen etc.)
  - Psykologiske mekanismer.

Vi normaliserer befolkningen til 1, og definerer andelen noise traders som μ.

Formulerer modellene som en overlappende generasjonsmodell, der;

- Alle lever i to perioder, men det kommer nye generasjoner til ettersom gamle dør.
- Periode 1: som unge investerer investorene sin initialformue.
- Periode 2: som gamle konsumerer de sin sluttformue.

To aktiva som gir samme sikre dividende, *r*:

- Sikkert aktivum: Fullstendig elastisk tilbud (uendelig tilbud). Pris = 1.
- Risikabelt aktivum: Fullstendig uelastisk tilbud (1 enhet). Ukjent pris.

Etterspørsel etter det usikre aktivumet er λ_t^R fra hver rasjonell aktør og λ_t^I fra hver irrasjonell aktør (noise trader).

Begge typer har CARA-nytte (constant absolute risk aversion), definert over sluttformue, *x*:

$$U(x) = -e^{-2\gamma x}$$

Den absolutte risikoaversjonen er her representert ved $\frac{-U''}{U'} = \frac{4\gamma^2 e^{-2\gamma x}}{2\gamma e^{-2\gamma x}} = 2\gamma$.

Antar også at usikkerheten er normalfordelt, dvs. at vi kan ta forventningsverdien til nyttefunksjonen og få:

$$E\left[U(x)\right] = -Ee^{-2\gamma x} = -e^{-2\gamma E(x) + \frac{1}{2}4\gamma^2 \operatorname{var}(x)} = -e^{-2\gamma\left[E(x) - \gamma \operatorname{var}(x)\right]}$$

Ser da at å maksimere forventet nytte er ekvivalent med å maksimere $E(x) - \gamma \operatorname{var}(x)$.

Rasjonelle investorer:

Sluttformue:

$$x_{t+1}^R = \left(W_t - \lambda_t^R P_t\right)(1+r) + \lambda_t^R\left(P_{t+1} + r\right)$$

Her er W eksogen initialformue, den første parentesen er andelen av formuen som investeres i obligasjoner og tjener en bruttoavkastning (1+r). Det siste leddet er andelen investert i aksjer multiplisert med den payoff som aksjer gir.

Tar så forventningsverdien til dette uttrykket:

$$E_t\left[x_{t+1}^R\right] = \left(W_t - \lambda_t^R P_t\right)(1+r) + \lambda_t^R\left(E_t\left[P_{t+1}\right] + r\right)$$

Fremtidig aksjepriser er det eneste usikre i dette uttrykket, slik at variansen er gitt ved:

$$Var_t\left[x_{t+1}^R\right] = \left(\lambda_t^R\right)^2 Var_t\left[P_{t+1}\right]$$

Setter vi disse uttrykkene inn i maksimeringsproblemet får vi:

$$\max_{\lambda_t^R} E_t\left(x_{t+1}^R\right) - \gamma \operatorname{var}_t\left(x_{t+1}^R\right)$$

$$\max_{\lambda_t^R}\left(W_t - \lambda_t^R P_t\right)(1+r) + \lambda_t^R\left(E_t\left[P_{t+1}\right] + r\right) - \gamma\left(\lambda_t^R\right)^2 Var_t\left[P_{t+1}\right]$$

FOB:

$$-P_t(1+r) + \left(E_t\left[P_{t+1}\right] + r\right) - 2\gamma\lambda_t^R Var_t\left[P_{t+1}\right] = 0$$

$$\lambda_t^R = \frac{E_t\left[P_{t+1}\right] + r - P_t(1+r)}{2\gamma Var_t\left[P_{t+1}\right]}$$

Telleren her gir differansen mellom forventet utbetaling fra aksjer og fremtidig utbetaling fra obligasjoner (dvs. telleren uttrykker forventet meravkastning av å investere i aksjer).

Nevneren utgjør risikoaversjon multiplisert med usikkerheten til fremtidig aksjeprisen.

Noise traders:

$$x_{t+1}^I = \left(W_t - \lambda_t^I P_t\right)(1+r) + \lambda_t^I\left(P_{t+1} + r\right)$$

$$E_t\left[x_{t+1}^I\right] = \left(W_t - \lambda_t^I P_t\right)(1+r) + \lambda_t^I\left(E_t^I\left[P_{t+1}\right] + r\right)$$

$$E_t\left[x_{t+1}^I\right] = \left(W_t - \lambda_t^I P_t\right)(1+r) + \lambda_t^I\left(E_t^R\left[P_{t+1}\right] + \rho_t + r\right)$$

Løsningen på dette maksimeringsproblemet er analog med denne for de rasjonelle investorene. Antar også at samtlige investorer beregner variansen på samme måte.

$$\lambda_t^I = \frac{E_t^I\left[P_{t+1}\right] + r - P_t(1+r)}{2\gamma Var_t\left[P_{t+1}\right]}$$

$$\lambda_t^I = \frac{E_t^R\left[P_{t+1}\right] + \rho_t + r - P_t(1+r)}{2\gamma Var_t\left[P_{t+1}\right]}$$

$$\lambda_t^I = \lambda_t^R + \frac{\rho_t}{2\gamma Var_t\left[P_{t+1}\right]}$$

Dersom dette siste leddet er positivt (negativt) har vi at noise-traderne er bullish (bearish) og investerer mer (mindre) i aksjer enn de rasjonelle investorene.

<u>Markedslikevekt</u>:

Vi antar et eksogent, normalisert tilbud av aksjer, slik at $\mu\lambda_t^I + (1-\mu)\lambda_t^R = 1$. Setter så inn uttrykket vi fant for noise traderne:

$$\mu\left[\lambda_t^R + \frac{\rho_t}{2\gamma Var_t\left[P_{t+1}\right]}\right] + (1-\mu)\lambda_t^R = 1$$

$$\lambda_t^R + \frac{\mu\rho_t}{2\gamma Var_t\left[P_{t+1}\right]} = 1$$

Setter så inn uttrykket vi fant for de rasjonelle investorene:

$$\frac{E_t^R\left[P_{t+1}\right] + r + \mu\rho_t - P_t(1+r)}{2\gamma Var_t\left[P_{t+1}\right]} = 1$$

$$E_t^R\left[P_{t+1}\right] + r + \mu\rho_t - P_t(1+r) = 2\gamma Var_t\left[P_{t+1}\right]$$

Løser uttrykket for likevektsprisen:

$$P_t = \frac{1}{1+r}\left[E_t^R\left[P_{t+1}\right] + r + \mu\rho_t - 2\gamma Var_t\left[P_{t+1}\right]\right]$$

Dette uttrykket kan fremstå noe vanskelig å tolke, fordi det innebærer at dagens pris avhenger av forventet fremtidig pris, samtidig som forventet fremtidig pris avhenger av dagens pris. Fokuserer derfor på stasjonære likevekter, og antar at den ubetingede fordelingen til fremtidig pris er lik fordelingen til dagens pris, dvs:

$$E\left[E_t^R\left(P_{t+1}\right)\right] = E^R\left(P_t\right)$$

Tar så forventningsverdien av likevektsløsningen:

$$E^R\left(P_t\right) = \frac{1}{1+r}\left[E^R\left(P_t\right) + r + \mu\rho^* - 2\gamma Var_t\left[P_{t+1}\right]\right]$$

Løser så dette uttrykket mhp $E^R\left(P_t\right)$:

$$\left[1 - \frac{1}{1+r}\right]E^R\left(P_t\right) = \frac{1}{1+r}\left[r + \mu\rho^* - 2\gamma Var_t\left[P_{t+1}\right]\right]$$

$$\left[\frac{r}{1+r}\right]E^R\left(P_t\right) = \frac{1}{1+r}\left[r + \mu\rho^* - 2\gamma Var_t\left[P_{t+1}\right]\right]$$

$$E^R\left(P_t\right) = \frac{1}{r}\left[r + \mu\rho^* - 2\gamma Var_t\left[P_{t+1}\right]\right]$$

Usikkerheten ved aksjeprisen er knyttet til noise tradernes feiloppfatning (husk; $\operatorname{var}\left(\rho_t\right) = \sigma_\rho^2$).

Kan da ta fra likevektsuttrykket at $\operatorname{var}\left(P_t\right) = \frac{\mu^2}{(1+r)^2}\sigma_\rho^2$, og antar videre at $\operatorname{var}\left(P_{t+1}\right) = \operatorname{var}\left(P_t\right)$.

Utnytter dette og skriver om uttrykket ovenfor:

$$E^R\left(P_t\right) = \frac{1}{r}\left[r + \mu\rho^* - \frac{2\gamma\mu^2}{(1+r)^2}\sigma_\rho^2\right]$$

Setter så disse funnene inn i uttrykket for likevektsprisen:

$$P_t = \frac{1}{1+r}\left[\frac{1}{r}\left[r + \mu\rho * - \frac{2\gamma\mu^2}{(1+r)^2}\sigma_\rho^2\right] + r + \mu\rho_t - \frac{2\gamma\mu^2}{(1+r)^2}\sigma_\rho^2\right]$$

$$P_t = \frac{1}{1+r}\left[1 + r + \frac{\mu\rho *}{r} + \mu\rho_t - \frac{2\gamma\mu^2}{r(1+r)^2}\sigma_\rho^2 - \frac{2\gamma\mu^2}{(1+r)^2}\sigma_\rho^2\right]$$

$$P_t = 1 + \frac{1}{1+r}\left[\frac{\mu\rho *}{r} + \mu\rho_t - \left[\frac{2\gamma\mu^2}{r(1+r)^2} + \frac{2\gamma\mu^2 r}{r(1+r)^2}\right]\sigma_\rho^2\right]$$

$$P_t = 1 + \frac{1}{1+r}\left[\frac{\mu\rho *}{r} + \mu\rho_t - \frac{2\gamma\mu^2(1+r)}{r(1+r)^2}\sigma_\rho^2\right]$$

$$P_t = 1 - \frac{2\gamma\mu^2}{r(1+r)^2}\sigma_\rho^2 + \frac{\mu\rho_t}{1+r} + \frac{\mu\rho *}{r(1+r)}$$

$$P_t = 1 - \frac{2\gamma\mu^2}{r(1+r)^2}\sigma_\rho^2 + \frac{\mu\rho_t}{1+r} + \frac{\mu\rho *}{r} - \frac{\mu\rho *}{(1+r)}$$

$$P_t = 1 + \frac{\mu(\rho_t - \rho *)}{1+r} + \frac{\mu\rho *}{r} - \frac{2\gamma\mu^2}{r(1+r)^2}\sigma_\rho^2$$

Tolkning av dette endelige uttrykket:

- Ser at dersom vi ikke har noen noise traders (dvs. dersom $\mu = 0$), så vil aksjeprisen være lik 1 (dvs. lik fundamentalverdien), slik at det sikre og det usikre alternativet har lik fremtidig utbetaling.
- Dersom vi har noise tradere:
  - Den første brøken i uttrykket gir uttrykk for hvordan feiloppfatningen skifter over tid. Om denne er;
    - Positiv, så er noise traderne bullish ift gjennomsnittet.
    - Negativ, så er noise traderne bearish ift gjennomsnittet.
  - Den andre brøken i uttrykket fanger opp gjennomsnittlig feiloppfatning, dvs. om denne er positiv (negativ) viser det at noise traderne i gjennomsnitt over tid er bullish (bearish), og dette bidrar til å øke (redusere) aksjeprisene.
  - Det siste leddet i uttrykket fanger opp investorenes krav til kompensasjon som følge av noise trader risiko. Noise tradere gjør markedet mer risikabelt for rasjonelle investorer. Det reflekterer også at en høyere risikoaversjon vil dempe dagens aksjepriser som følge av høyere krav til avkastning.

  I en økonomi med *noise traders* blir aktiva uten fundamentalrisiko usikre som en følge av at man ikke vet hva NT vil tro og forvente i fremtiden.

  Et viktig spørsmål som dukker opp, er naturligvis hvorvidt prisen er høyere eller lavere enn uten NT?

Relativ avkastning for de to typene investorer:
Kan irrasjonelle aktører "overleve" i markedet over tid, dersom de konstant feiloppfatter forventningene?
Har at avkastningen til de to investor-typene er gitt ved:

$$A_t^I = \left(W_t - P_t\lambda_t^I\right)r + P_t\lambda_t^I\left(\frac{r + P_{t+1} - P_t}{P_t}\right)$$

$$A_t^R = \left(W_t - P_t\lambda_t^R\right)r + P_t\lambda_t^R\left(\frac{r + P_{t+1} - P_t}{P_t}\right)$$

Kan så skrive den relative meravkastningen for NT som:

$$A_t^I - A_t^R = -\left(\lambda_t^I - \lambda_t^R\right)P_t r + \left(\lambda_t^I - \lambda_t^R\right)\left(r + P_{t+1} - P_t\right)$$

$$A_t^I - A_t^R = \left(\lambda_t^I - \lambda_t^R\right)\left(r + P_{t+1} - (1+r)P_t\right)$$

Et uttrykk for $\left(\lambda_t^I - \lambda_t^R\right)$ har vi allerede funnet under investorenes tilpasning:

$$\lambda_t^I - \lambda_t^R = \frac{\rho_t}{2\gamma Var_t\left[P_{t+1}\right]} = \frac{(1+r)^2\rho_t}{2\gamma\mu^2\sigma_\rho^2}$$

Tar så den betingede forventningen på tidspunkt *t* av meravkastningen ovenfor:

$$E_t\left[A_t^I - A_t^R\right] = \left(\lambda_t^I - \lambda_t^R\right)E_t^R\left(r + P_{t+1} - (1+r)P_t\right)$$

$$E_t\left[A_t^I - A_t^R\right] = \left(\lambda_t^I - \lambda_t^R\right)\left(r + E_t^R\left[P_{t+1}\right] - (1+r)P_t\right)$$

Tar så utgangspunkt i likevektsprisen for å finne et uttrykk for den siste parentesen av dette uttrykket:

$$P_t = \frac{1}{1+r}\left[E_t^R\left[P_{t+1}\right] + r + \mu\rho_t - 2\gamma Var_t\left[P_{t+1}\right]\right]$$

$$P_t(1+r) = E_t^R\left[P_{t+1}\right] + r + \mu\rho_t - 2\gamma Var_t\left[P_{t+1}\right]$$

$$r + E_t^R\left[P_{t+1}\right] - P_t(1+r) = 2\gamma Var_t\left[P_{t+1}\right] - \mu\rho_t$$

$$r + E_t^R\left[P_{t+1}\right] - P_t(1+r) = \frac{2\gamma\mu^2\sigma_\rho^2}{(1+r)^2} - \mu\rho_t$$

Setter nå dette uttrykket inn i uttrykket for forventet meravkastning:

$$E_t\left[A_t^I - A_t^R\right] = \left(\lambda_t^I - \lambda_t^R\right)\left(\frac{2\gamma\mu^2\sigma_\rho^2}{(1+r)^2} - \mu\rho_t\right)$$

Setter så inn uttrykket for forskjellen i porteføljevalg:

$$E_t\left[A_t^I - A_t^R\right] = \frac{(1+r)^2\rho_t}{2\gamma\mu^2\sigma_\rho^2}\left(\frac{2\gamma\mu^2\sigma_\rho^2}{(1+r)^2} - \mu\rho_t\right)$$

$$E_t\left[A_t^I - A_t^R\right] = \rho_t - \frac{(1+r)^2\rho_t^2}{2\gamma\mu\sigma_\rho^2}$$

Kan nå omgjøre dette til den ubetingede forventningen, dvs. hvilken meravkastning NT vil oppnå over de rasjonelle aktørene i gjennomsnitt over tid:

$$E\left[A^I - A^R\right] = \rho^* - \frac{(1+r)^2\left(\rho^*\right)^2 + (1+r)^2\sigma_\rho^2}{2\gamma\mu\sigma_\rho^2}$$

Ser av dette uttrykket at den siste delen vil alltid være positiv, slik at for at NT skal oppnå meravkastning over tid i forhold til de rasjonelle investorene, vil et minimumskrav være at $\rho^* > 0$. Vi kan imidlertid se at denne gjennomsnittlige feiloppfatningen ikke kan være for stor, fordi da vil det andre leddet dominere, og meravkastningen være negativ. En nærmere tolkning av uttrykket:

- Første leddet, ρ^*, forteller oss at jo mer bullish NT er i gjennomsnitt, jo høyere meravkastning vil de oppnå fordi de vil investere mer i aksjer i forhold til d rasjonelle investorene.
- Andre leddet:
  - Hold-more effekten, gitt ved $(1+r)^2(\rho^*)^2$, forteller at NT's gjennomsnittlige optimisme driver prisen opp, slik at avkastningen reduseres.
  - Friedman effekten, gitt ved $(1+r)^2\sigma_\rho^2$, sier at NT "kjøper mye når andre kjøper mye". Denne økte etterspørselen, som følge av feiloppfatningen, presser prisene videre opp og dermed avkastningen ned.
  - "create space effekten", gitt ved $2\gamma\mu\sigma_\rho^2$, reflekterer at når NT-risikoen øker blir de rasjonelle investorene mindre villige til å gå imot NT, dvs. de søker i mindre grad å utnytte feilprisinger (og arbitrasjemuligheter) i frykt for at NT skal forverre situasjonen ytterligere. Denne motviljen øker også med de rasjonelle investorenes risikoaversjon.

Kan denne modellen forklare "the equity premium puzzle"?
Ja, den kan det dersom $E^R[P_t] < 1$, fordi:

- Vi har i dette tilfellet ingen kursgevinster over tid, dvs. at kapitalgevinster og –tap vil nulle ut hverandre i gjennomsnitt.
- Aksjene gir fast utbetaling/dividende, r.
- Gjennomsnittlig avkastning vil da være gitt ved; $\frac{r}{E^R[P_t]} > r$ når $E^R[P_t] < 1$

<u>Forventet aksjepris</u>
Tar utgangspunkt i den eksakte aksjeprisen vi har funnet tidligere:

$$P_t = 1 + \frac{\mu(\rho_t - \rho^*)}{1+r} + \frac{\mu\rho^*}{r} - \frac{2\gamma\mu^2}{r(1+r)^2}\sigma_\rho^2$$

Tar så den rasjonelle forventningen av dette:

$$E^R(P_t) = 1 + \frac{\mu\rho^*}{r} - \frac{2\gamma\mu^2}{r(1+r)^2}\sigma_\rho^2$$

Ser da at den forventede aksjeprisen er den fundamentale verdien, pluss et tillegg for den gjennomsnittlige feiloppfatningen, minus et uttrykk for risikokompensasjon som følge av NT-risiko. Dersom denne kompensasjonen overgår den gjennomsnittlige feiloppfatningen, så har vi at $E^R[P_t] < 1$. Ser altså at modellen kan forklare EPP dersom ρ^* fortsatt er positiv (krav for at NT skal holde seg i markedet) men ikke for høy.

DEL 3 – Utvidelse av grunnmodellen

- Teoretiske svakheter:
  - Langsiktige investorer
  - Arbeidsinntekt – korrelert med avkastningen i finansielle aktiva
  - Investeringer over livsløpet

<u>Porteføljevalg og myopiske ("nærsynte") løsninger</u>
Økonomer har tradisjonelt basert sine analyser på forventnings-varians modellen, som ble utviklet allerede på 60-tallet. Den viktigste konklusjonen fra denne modelleringen er at alle rasjonelle investorer holder den samme porteføljen av risikable aktiva (dvs. markedsporteføljen av aksjer og obligasjoner).

Dette er referert til som *Tobins "mutual-fund" teorem*. I praksis gis det imidlertid ikke alltid råd som er i tråd med denne analysen. Mulige forklaringer kan være:

- Finansbransjen søker å rettferdiggjøre eget levebrød. F.eks. hvordan kan de ta høye gebyrer for å forvalte en portefølje som i gjennomsnitt presterer dårligere enn markedsporteføljen?
- Det kan også være legitime grunner til at investorer velger andre porteføljer enn markedsporteføljen av usikre aktiva. F.eks. i forbindelse med:
  - Skatteregler
  - Investeringshorisont
  - Ulik risiko i arbeidsinntekt (Humankapital er et såkalt *non-tradeable asset*)
- Et typisk råd er at unge investorer bør ta mer risiko enn eldre.
- Et annet typisk råd er at konservative investorer anbefales å holde mer obligasjoner ift aksjer enn mer agressive investorer (se tabell 1.1 fra Campbell/Viceira).
  - Disse anbefalingene er konsistente med forventnings-varians modelleringen i den forstand at mer konservative investorer skal holde mer cash, men er inkonsistent i form av at sammensetningen av de risikable aktiva (obligasjoner og aksjer) skal være konstant, fordi alle skal holde den samme markedsporteføljen. En mer aggressiv investor skal bevege seg oppover kapitalmarkedslinjen (CML) ved å investere mer i markedsporteføljen og eventuelt låne cash.

Grunnmodellen vi har sett på med konsumbasert verdsetting gir et godt grunnlag for å se på når optimale porteføljer avviker fra prediksjonene vi finner gjennom forventning-varians modelleringen. F.eks. kan vi se at investeringshorisont og arbeidsinntekt kan ha innvirkning:

- En lengre investeringshorisont kan gi et annet relevant mål på risiko.
  - Selv kontanter gir risiko på lang sikt, som følge av inflasjon
  - Empiri antyder at aksjemarkedet i noen grad kan predikeres på lang sikt
  - I enkelte land kan man handle med realrenteobligasjoner som dermed gir lavere risiko da inflasjonen ikke får innvirkning.
    - Eksempel på dette er at Norge forsøkte å låne NOK fra andre land til oljeutvinning på 70-tallet, men fikk avslag. USA har lånt vanvittige summer USD fra andre land, og dette skaper en fristelse til å trykke penger for å betale tilbake. Problemet blir økt inflasjon, som gir dårligere realavkastning for de som lånte bort penger.
- Arbeidsinntekt stammer fra humankapital. Humankapital kan betraktes som et ikke-omsettbart aktivum som gir en usikker dividende (lik arbeidsinntekten). Kan dette ha innvirkning på hvordan porteføljen av risikable aktiva skal settes sammen?

<u>Tradisjonell tilnærming (dvs. forventnings-varians modellen) – når er den gyldig?</u>
Det er tilfeller med en mer generell tilnærming hvor resultatene fra tradisjonell analyse er gyldige. I disse tilfellene er investeringshorisonten uten betydning, og boka refererer da til disse porteføljevalgene som *myopiske*. Foreløpig ser vi også bort fra andre inntektskilder enn finansinntekter, i likhet med den tradisjonelle teorien.
<u>Kortsiktig porteføljevalg</u>:
Anta her at investorene har en horisont over en periode, og at R_{t+1} her gir nettoavkastning fra periode *t* til *t+1*.
Ser så først på en forventning/varians analyse av dette.

Anta da først at vi kun har to tilgjengelige aktiva, et risikofritt med avkastning $R_{f,t+1}$ samt et risikabelt med betinget forventet avkastning $E_t\left[R_{t+1}\right]$, med betinget varians σ_t^2. At disse er betinget innebærer at forventet avkastning og varians i periode *t+1* bygger på tilgjengelig informasjon i periode *t*.

Se nå på investorens porteføljeavkastning, $R_{P,t+1}$, og la α_t være andelen av porteføljen som er investert i det usikre aktivumet. Vi har da at:

$$R_{P,t+1} = R_{f,t+1} + \alpha_t \left(R_{t+1} - R_{f,t+1} \right)$$

$$E_t \left(R_{P,t+1} \right) = R_{f,t+1} + \alpha_t \left[E_t \left(R_{t+1} \right) - R_{f,t+1} \right]$$

Variansen til porteføljeavkastningen er da gitt ved:

$$\sigma^2_{P,t} = \text{var}\left[R_{f,t+1} + \alpha_t \left(E_t \left(R_{t+1} \right) - R_{f,t+1} \right) \right] = \text{var}\left[\alpha_t E_t \left(R_{t+1} \right) \right] = \alpha_t^2 \sigma_t^2$$

Antar så at investoren ønsker å maksimere følgende funksjon:

$$\max_{\alpha_t} \left[E_t \left(R_{P,t+1} \right) - \frac{1}{2} k \sigma^2_{P,t} \right]$$

Kan tolke *k* som et mål på risikoaversjonen. Setter så inn uttrykkene for forventet porteføljeavkastning og porteføljevariansen, og maksimerer så problemet:

$$\max_{\alpha_t} \left[R_{f,t+1} + \alpha_t \left[E_t \left(R_{t+1} \right) - R_{f,t+1} \right] - \frac{1}{2} k \alpha_t^2 \sigma_t^2 \right]$$

FOB:

$$E_t \left(R_{t+1} \right) - R_{f,t+1} - \frac{2k}{2} \alpha_t \sigma_t^2 = 0$$

Løser så dette for andelen som investeres i risikabelt aktiva, α_t :

$$\alpha_t = \frac{E_t \left(R_{t+1} \right) - R_{f,t+1}}{k \sigma_t^2}$$ ligning (3) i notatene

Kan skrive om dette i form av Sharpe-brøken for porteføljen:

$$\alpha_t = \frac{S_t}{k \sigma_t} \qquad \text{der hvor } S_t = \frac{E_t \left(R_{t+1} \right) - R_{f,t+1}}{\sigma_t}$$

Hvordan tolker vi ligning (3)?

- o Jo større meravkastning man kan oppnå av det risikable aktivumet, jo mer vil man investere i dette.
- o Jo mer risikoavers investor er (dvs. høyere *k* er), jo mindre vil man plassere i det risikable aktivumet.
- o Jo mer risikabelt det risikable aktivumet er (dvs. jo høyere variansen til dette er), jo mindre vil man plassere i det risikable aktivumet.

Hva om det risikofrie aktivumet ikke er risikofritt, men bærer lav risiko?
Da vil vi ha følgende uttrykk for forventet porteføljeavkastning og porteføljevariansen:

$$E_t \left(R_{P,t+1} \right) = \alpha_t E_t \left(R_{t+1} \right) + \left(1 - \alpha_t \right) E_t \left(R_{0,t+1} \right)$$

$$\sigma^2_{P,t} = \text{var}\left[\alpha_t E_t \left(R_{t+1} \right) + \left(1 - \alpha_t \right) E_t \left(R_{0,t+1} \right) \right]$$

$$= \alpha_t^2 \sigma_t^2 + \left(1 - \alpha_t \right)^2 \sigma_{0,t}^2 + 2 \alpha_t \left(1 - \alpha_t \right) \sigma_{R_0,R}$$

Maksimering av det samme uttrykket som ved et risiko<u>fritt</u> alternativ gir oss nå følgende:

$$\max_{\alpha_t} \left[\alpha_t E_t \left(R_{t+1} \right) + \left(1 - \alpha_t \right) E_t \left(R_{0,t+1} \right) - \frac{1}{2} k \alpha_t^2 \sigma_t^2 + \left(1 - \alpha_t \right)^2 \sigma_{0,t}^2 + 2 \alpha_t \left(1 - \alpha_t \right) \sigma_{R_0,R} \right]$$

FOB:

$$E_t \left(R_{t+1} \right) - E_t \left(R_{0,t+1} \right) - k \left[\alpha_t \sigma_t^2 - \left(1 - \alpha_t \right) \sigma_{0,t}^2 + \left(1 - 2\alpha_t \right) \sigma_{R_0,R} \right] = 0$$

$$E_t(R_{t+1}) - E_t(R_{0,t+1}) + k\left[\sigma_{0,t}^2 - \sigma_{R_0,R}\right] = k\left[\alpha_t\left(\sigma_t^2 + \sigma_{0,t}^2 - 2\sigma_{R_0,R}\right)\right]$$

$$\alpha_t = \frac{E_t(R_{t+1}) - E_t(R_{0,t+1}) + k\left[\sigma_{0,t}^2 - \sigma_{R_0,R}\right]}{k\left(\sigma_t^2 + \sigma_{0,t}^2 - 2\sigma_{R_0,R}\right)}$$

$$\alpha_t = \frac{E_t(R_{t+1}) - E_t(R_{0,t+1})}{k\left(\sigma_t^2 + \sigma_{0,t}^2 - 2\sigma_{R_0,R}\right)} + \frac{\sigma_{0,t}^2 - \sigma_{R_0,R}}{\sigma_t^2 + \sigma_{0,t}^2 - 2\sigma_{R_0,R}}$$

$$\alpha_t = \frac{E_t(R_{t+1}) - E_t(R_{0,t+1})}{k\sigma_{R_{t+1}-R_{0,t+1}}^2} + \frac{\sigma_{0,t}^2 - \sigma_{R_0,R}}{\sigma_{R_{t+1}-R_{0,t+1}}^2}$$ ligning (4) i notatene

I dette tilfellet ser vi at α_t består av to deler. Den første delen er den samme som ved et risikofritt aktivum, mens det andre leddet viser hvordan optimal allokering endres med risikoen til obligasjonene.
La oss se hva som skjer hvis risikoen til obligasjonene går mot 0:

$$\sigma_{0,t}^2 \to 0 \Rightarrow \sigma_{R_0,R} \to 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{R_{t+1}-R_{0,t+1}}^2 = \sigma_t^2 + \sigma_{0,t}^2 - 2\sigma_{R_0,R} \to \sigma_t^2$$

$$\Rightarrow \alpha_t \to \frac{E_t(R_{t+1}) - R_{f,t+1}}{k\sigma_t^2}$$

Tenk også på følgende sammenhenger:

- Dersom $\sigma_{R_0,R} < 0$, så vil total risiko reduseres, og man vil ønske å plassere en større andel i det mest risikable aktivumet for å oppnå meravkastning (dvs. at α_t blir høyere).
- Dersom $\sigma_{R_0,R} > 0$, så vil total risiko øke pga at begge aktivaene vil samvariere ved systematiske svingninger, og man vil plassere mer i lavrisiko-aktivumet (dvs. α_t blir lavere).

Hva om vi har mange usikre og et risikofritt aktiva?

- Generaliserin av ligning (3), men hvor andelen investert i risikable aktiva, α_t, er en vektor av meravkastninger multiplisert med inverse av de usikre aktivaenes varians/kovariansmatrise.
- Grafisk vil denne løsningen se ut som den tradisjonelle løsningen (gitt ved figur 1.1 i boka), og det som vil skille investorene fra hverandre er hvor mye som investeres risikofritt. Dette bestemmes av risikoaversjonen, *k*.

<u>Nytte definert over sluttkonsum</u>:
Ser nå på investorer hvis nytte blir bestemt over sluttkonsum, dvs. den formuen de sitter med i periode 2 når vi antar at de vil konsumere alt de har før de dør. Å definere nytten over sluttkonsum eller sluttformue er ekvivalent her siden dette er en statisk modell. Dette innebærer at problemet deres blir å maksimere $U(W_{t+1})$ under betingelsen at $W_{t+1} = (1 + R_{P,t+1})W_t$.
Tre former på nyttefunksjonen som gir resultater konsistente med forventning/varians analyser:

- Kvadratisk nytte: $U(W_{t+1}) = aW_{t+1} - bW_{t+1}^2$

  Nyttemaksimering vil her være ekvivalent med å maksimere en lineær kombinasjon med forventning og varians som var det vi gjorde tidligere. Vi trenger da ingen forutsetninger om avkastningsfordeling, men vi må se på hva som skjer med risikoaversjonen når formuen endres:

Vi vet at målene på absolutt risikoaversjon (ARA) og relativ risikoaversjon (RRA) er gitt ved hhv:

$$ARA = -\frac{U''}{U'} \text{ og } RRA = -\frac{U'' \cdot W}{U'}$$

Med denne nyttefunksjonen får vi da at:

$$ARA = \frac{2b}{a-2bW} \text{ og } RRA = \frac{2bW}{a-2bW}$$

Ser da at den relative risikoaversjonen er stigende i formuen. Dette er derfor en urimelig nyttefunksjon (se s. 24 i boka).

- Eksponentiell nytte: $U\left(W_{t+1}\right) = -e^{-\theta W_{t+1}}$

  Forutsetter her også normalfordelt avkastning. I dette tilfellet har vi følgende:

  $$ARA = \theta \text{ og } RRA = \theta W$$

  Kan da se at den absolutte risikoaversjonen er konstant, men at den relative risikoaversjonen stiger med formuen. Dette er fortsatt en urimelig egenskap.

- Se så på CRRA-nytte: $U\left(W_{t+1}\right) = \frac{W_{t+1}^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}$

  Kombinerer dette med forusetning om lognormalfordelt avkastning. Dette er som i grunnmodellen vår, og viser seg å være nyttig når vi diskuterer porteføljevalg. Her har vi konstant relativ risikoaversjon, som viser seg å være rimelig ift data. En utfordring er å konvertere avkastning på individuelle aktiva til avkastningen på porteføljen. Vi skal imidlertid bruke denne formen på nyttefunksjonen videre.

Husk på følgende regneregel:

$$\log E_t X_{t+1} = E_t \log X_{t+1} + \frac{1}{2}\text{var}_t \log X_{t+1} \equiv E_t x_{t+1} + \frac{1}{2}\sigma_{x,t}^2$$

der vi har definert $\log X = x$

<u>Kortsiktig portefølje med CRRA-nytte og lognormalfordelt avkastning</u>:
Ved å anta at avkastningen på investors portefølje er lognormalfordelt kan vi trekke konklusjonen at sluttformuen også er lognormalfordelt, siden denne er gitt som:

$$W_{t+1} = \left(1 + R_{P,t+1}\right) W_t$$

Skal så omskrive CRRA-nyttefunksjonen slik at den passer log-rammeverket bedre. Merk i den forbindelse to ting:

- Å maksimere nytten er det samme som å maksimere logaritmen til nytten.
- Vi kan overse skaleringsfaktoren $(1-\gamma)^{-1}$ i nyttefunksjonen fordi dette er en konstant som ikke påvirker løsningen vi kommer frem til.

Egenskapen til lognormalfordelte variable gir oss følgende uttrykk for logaritmen til forventet nytte (når vi har utelukket skaleringsfaktoren):

$$\log E_t W_{t+1}^{1-\gamma} = E_t \log W_{t+1}^{1-\gamma} + \frac{1}{2}\text{var}_t \log W_{t+1}^{1-\gamma}$$

$$= E_t \left(1-\gamma\right) \log W_{t+1} + \frac{1}{2}\text{var}_t \left(1-\gamma\right) \log W_{t+1}$$

$$= \left(1-\gamma\right) E_t w_{t+1} + \frac{1}{2}\left(1-\gamma\right)^2 \sigma_{w,t}^2$$

Kan også skrive budsjettbetingelsen på log-form:

$$\log W_{t+1} = \log\left(1 + R_{P,t+1}\right) + \log W_t$$

$$w_{t+1} = r_{P,t+1} + w_t \qquad \text{der} \qquad r_{P,t+1} = \log\left(1 + R_{P,t+1}\right) \approx R_{P,t+1}$$

Nå har vi følgende maksimeringsproblem:

$$\max\left[(1-\gamma)E_t w_{t+1} + \frac{1}{2}(1-\gamma)^2 \sigma_{w,t}^2\right]$$

Dette er ekvivalent med:

$$\max\left[E_t w_{t+1} + \frac{1}{2}(1-\gamma)\sigma_{w,t}^2\right]$$

Kan så utnytte følgende:

$$E_t w_{t+1} = E_t\left[r_{P,t+1} + w_t\right] = E_t\left[r_{P,t+1}\right] + w_t$$

siden w_t er en konstant som ikke påvirker maksimeringsproblemet, så kan vi ignorere denne videre.

$$\sigma_{w,t}^2 = \text{var}_t\left[w_{t+1}\right] = \text{var}_t\left[r_{P,t+1} + w_t\right] = \text{var}_t\left[r_{P,t+1}\right] = \sigma_{P,t}^2$$

Plugger dette inn i maksimeringsuttrykket og sitter da igjen med:

$$\max\left[E_t\left(r_{P,t+1}\right) + \frac{1}{2}(1-\gamma)\sigma_{P,t}^2\right]$$

Dette kan igjen omskrives som følger:

$$\max\left[E_t\left(r_{P,t+1}\right) + \frac{1}{2}\sigma_{P,t}^2 - \frac{\gamma}{2}\sigma_{P,t}^2\right]$$

$$\max\left[\log E_t\left(1 + R_{P,t+1}\right) - \frac{\gamma}{2}\sigma_{P,t}^2\right] \qquad \text{ligning (6) i notatene}$$

Har her en analogi til tradisjonell forventning/varians analyse, hvor relevant forventet avkastning er den aritmetiske forventede avkastningen, mens relevant varians er variansen til log avkastning. Koeffisienten γ spiller her samme rolle som *k* gjorde tidligere.

- Merk spesialtilfellet der γ =1, dvs. hvor vi har log nytte. Da ønsker investoren å maksimere forventet log avkastning. Hvis γ >1 søker investoren en sikrere portefølje, mens hvis γ <1 søker investoren en mer usikker portefølje (fordi man da kan oppnå en høyere forventet aritmetisk avkastning).

For å komme videre i denne analysen må vi relatere log porteføljeavkastning til log avkastning på underliggende aktiva. Anta da at vi igjen har et sikkert og et usikkert aktiva, slik at porteføljeavkastningen da er gitt som:

$$R_{P,t+1} = R_{f,t+1} + \alpha_t\left[R_{t+1} - R_{f,t+1}\right]$$

Log porteføljeavkastning er da log av denne lineære kombinasjonen (<u>ikke</u> det samme som en lineær kombinasjon av logaritmer!). Vi kan imidlertid benytte en Taylor-approksimasjon for å relatere log porteføljeavkastning til log avkastning på de underliggende aktivaene. Resultatet av dette er som følger:

$$r_{P,t+1} - r_{f,t+1} = \alpha_t\left[r_{t+1} - r_{f,t+1}\right] + \frac{1}{2}\alpha_t\left(1-\alpha_t\right)\sigma_t^2$$

Merk at det siste leddet i denne approksimasjonen viser forskjellen fra å bare bytte ut avkastningene med log avkastninger, og at dette leddet forsvinner dersom α_t er 0 eller 1, dvs. dersom hele porteføljen består av kun risikabelt aktiva eller kun av risikofritt. Denne tilnærmingen kan også generaliseres for tilfeller med mange aktiva.

Utnytter videre følgende:

$$E_t r_{P,t+1} = r_{f,t+1} + \alpha_t \left[E_t r_{t+1} - r_{f,t+1} \right] + \frac{1}{2} \alpha_t (1 - \alpha_t) \sigma_t^2$$
$$\sigma_{P,t}^2 = \alpha_t^2 \sigma_t^2$$

Vi kan dermed skrive investorenes objektfunksjon og løse denne som følger:

$$\max \left[E_t \left(r_{P,t+1} \right) + \frac{1}{2} (1 - \gamma) \sigma_{P,t}^2 \right]$$

$$\max_{\alpha_t} \left[r_{f,t+1} + \alpha_t \left[E_t r_{t+1} - r_{f,t+1} \right] + \frac{1}{2} \alpha_t (1 - \alpha_t) \sigma_t^2 + \frac{1}{2} (1 - \gamma) \alpha_t^2 \sigma_t^2 \right]$$

FOB:

$$\left[E_t r_{t+1} - r_{f,t+1} \right] + \frac{1}{2} (1 - 2\alpha_t) \sigma_t^2 + (1 - \gamma) \alpha_t \sigma_t^2 = 0$$

$$\left[E_t r_{t+1} - r_{f,t+1} \right] + \frac{1}{2} \sigma_t^2 - \alpha_t \left[\sigma_t^2 - (1 - \gamma) \sigma_t^2 \right] = 0$$

$$\left[E_t r_{t+1} - r_{f,t+1} \right] + \frac{1}{2} \sigma_t^2 = \alpha_t \left[\gamma \sigma_t^2 \right]$$

$$\alpha_t = \frac{\left[E_t r_{t+1} - r_{f,t+1} \right] + \frac{1}{2} \sigma_t^2}{\gamma \sigma_t^2}$$

Merk her likheten til forventning/varians resultatet. Telleren i dette uttrykket er log meravkastning på det usikre aktivaet, pluss en halv ganger variansen for å konvertere fra log til standard avkastning (siden det til syvende og sist er det investor bryr seg om). Da ser vi at uttrykket er veldig likt det vi fant tidligere.

Myopisk langsiktig porteføljevalg:

Ser nå på konsekvensene av at investorene har en lang investeringshorisont. Antar først at det er sluttformuen om K perioder som betyr noe, dvs. at investoren har nytten $U = U\left(W_{t+K}\right)$.

Antar fortsatt CRRA-nytte, og definerer bruttoavkastningen som $\left(1 + R_{pK,t+K}\right)$, slik at sluttformuen er gitt ved;

$$W_{t+K} = \left(1 + R_{pK,t+K}\right) W_t$$
$$W_{t+K} = \left(1 + R_{p,t+1}\right)\left(1 + R_{p,t+2}\right) \ldots\ldots \left(1 + R_{p,t+K}\right) W_t$$

Log avkastning er dermed per definisjon;

$$\log\left(1 + R_{pK,t+K}\right) = r_{pK,t+K} = r_{p,t+1} + r_{p,t+2} + \ldots\ldots + r_{p,t+K}$$

Anta nå at investoren ikke kan rebalansere porteføljen i løpet av investeringshorisonten. Investoren må dermed evaluere avkastningen over K perioder på samme måte som en kortsiktig investor.

Videre forutsetter vi følgende:

- Avkastningen er uavhengig og identisk over tid (IID), slik at;
  - Log risikofri rente er konstant, og risikofri avkastning over K perioder er Kr_f.
  - Log forventet avkastning for det usikre aktivumet er konstant og lik E(r), slik at man over K perioder får $KE(r)$.
  - Variansen til log avkastning er konstant over tid, lik σ^2, og avkastninga er ukorrelert over tid, slik at $\text{var}\left(r_{K,t+K}\right) = \sum_t \text{var}\left(r_{t+1}\right) = K\sigma^2$
- Kan utifra dette se at med IID avkastning blir alle forventningsverdier og varianser skalert opp med K, hvor K er antall perioder i investeringshorisonten. Avveiningen mellom forventet

meravkastning og varians blir derfor den samme som ved en periodes horisont, og det blir dermed også optimal allokering.

Tillater så rebalansering, og ser på 2 tilfeller:
Tilfelle 1 er med CRRA-nytte, lognormalfordelt og IID avkastning.
Antar 2 perioder, der vi er interessert i sluttformuen:

$$W_{t+2} = \left(1 + R_{p2,t+2}\right) W_t$$

Tar logaritmen av dette og får:

$$w_{t+1} = r_{p2,t+2} + w_t$$

$$w_{t+1} = r_{p,t+1} + r_{p,t+2} + w_t$$

Objektfunksjonen vår kan nå skrives, på samme måte som tidligere, som:

$$\max \log E_t\left(1 + R_{p2,t+2}\right) - \frac{1}{2}\gamma \operatorname{var}_t\left(r_{p2,t+2}\right)$$

$$\max E_t \log\left(1 + R_{p2,t+2}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{var}_t\left(r_{p2,t+2}\right) - \frac{1}{2}\gamma \operatorname{var}_t\left(r_{p2,t+2}\right)$$

$$\max E_t\left(r_{p2,t+2}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{var}_t\left(r_{p2,t+2}\right) - \frac{1}{2}\gamma \operatorname{var}_t\left(r_{p2,t+2}\right)$$

Skal så finne et uttrykk for $r_{p2,t+2}$. Vi vet fra før at;

$$r_{p2,t+2} = r_{p,t+1} + r_{p,t+2}$$

$$r_{p2,t+2} - 2r_f = \left(r_{p,t+1} - r_f\right) + \left(r_{p,t+2} - r_f\right)$$

Altså er meravkastningen over den risikofrie avkastningen i perioden lik summen av meravkastningen i første og andre periode. Det kan vises (og det er gitt ved ligning (2.21) i boka) at:

$$r_{p,t+1} - r_f = \alpha_t\left(r_{t+1} - r_f\right) + \frac{1}{2}\alpha_t\left(1 - \alpha_t\right)\sigma^2$$

Merk her at variansen er konstant og dermed uavhengig av tiden t. Vi setter så inn dette uttrykket for de to leddene på høyre side i uttrykket over:

$$r_{p2,t+2} - 2r_f = \alpha_t\left(r_{t+1} - r_f\right) + \frac{1}{2}\alpha_t\left(1 - \alpha_t\right)\sigma^2 + \alpha_{t+1}\left(r_{t+2} - r_f\right) + \frac{1}{2}\alpha_{t+1}\left(1 - \alpha_{t+1}\right)\sigma^2$$

Tar så variansen til avkastningen, og finner at denne er:

$$\operatorname{var}_t\left(r_{p2,t+2}\right) = \operatorname{var}_t\left(r_{p,t+1}\right) + \operatorname{var}_t\left(r_{p,t+2}\right) + \operatorname{cov}_t\left(r_{p,t+1}, r_{p,t+2}\right)$$

$$\operatorname{var}_t\left(r_{p2,t+2}\right) = \operatorname{var}_t\left(r_{p,t+1}\right) + \operatorname{var}_t\left(r_{p,t+2}\right)$$

$$\operatorname{var}_t\left(r_{p2,t+2}\right) = \alpha_t^2\sigma^2 + \alpha_{t+1}^2\sigma^2 = \left(\alpha_t^2 + \alpha_{t+1}^2\right)\sigma^2$$

Merk at vi kjenner verdien på α_{t+1} på tidspunkt *t*, fordi med CRRA-nytte er andelene investert i usikre aktiva uavhengig av formuen, og derfor uavhengig av hvordan det går med avkastningen frem til neste periode. Dette kan vi utnytte til å finne et uttrykk for de to første av de tre leddene i objektfunksjonen. Har da følgende:

$$E_t\left(r_{p2,t+2}\right) = 2r_f + \alpha_t\left(E_t(r) - r_f\right) + \frac{1}{2}\alpha_t\left(1 - \alpha_t\right)\sigma^2 + \alpha_{t+1}\left(E_t(r) - r_f\right) + \frac{1}{2}\alpha_{t+1}\left(1 - \alpha_{t+1}\right)\sigma^2$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{var}_t\left(r_{p2,t+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\alpha_t^2 + \alpha_{t+1}^2\right)\sigma^2$$

Ved å sette dette sammen får vi uttrykt de to første leddene av objektfunksjonen som:

$$E_t\left(r_{p2,t+2}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{var}_t\left(r_{p2,t+2}\right)=2r_f+\alpha_t\left(E_t(r)-r_f\right)+\frac{1}{2}\alpha_t\left(1-\alpha_t\right)\sigma^2$$

$$+\alpha_{t+1}\left(E_t(r)-r_f\right)+\frac{1}{2}\alpha_{t+1}\left(1-\alpha_{t+1}\right)\sigma^2+\frac{1}{2}\left(\alpha_t^2+\alpha_{t+1}^2\right)\sigma^2$$

$$E_t\left(r_{p2,t+2}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{var}_t\left(r_{p2,t+2}\right)=2r_f+\alpha_t\left(E_t(r)-r_f\right)+\frac{1}{2}\alpha_t\sigma^2+\alpha_{t+1}\left(E_t(r)-r_f\right)+\frac{1}{2}\alpha_{t+1}\sigma^2$$

$$E_t\left(r_{p2,t+2}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{var}_t\left(r_{p2,t+2}\right)=2r_f+\left(\alpha_t+\alpha_{t+1}\right)\left(E_t(r)-r_f+\frac{1}{2}\sigma^2\right)$$

Målet vårt er å maksimere denne mht porteføljevektene;

$$\max_{\alpha_t,\alpha_{t+1}} E_t\left(r_{p2,t+2}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{var}_t\left(r_{p2,t+2}\right)-\frac{1}{2}\gamma\,\mathrm{var}_t\left(r_{p2,t+2}\right)$$

$$=\max_{\alpha_t,\alpha_{t+1}} 2r_f+\left(\alpha_t+\alpha_{t+1}\right)\left(E_t(r)-r_f+\frac{1}{2}\sigma^2\right)-\frac{1}{2}\gamma\left(\alpha_t^2+\alpha_{t+1}^2\right)\sigma^2$$

FOB;

$$\left(E_t(r)-r_f+\frac{1}{2}\sigma^2\right)-\gamma\alpha_t\sigma^2=0\Rightarrow\alpha_t=\frac{E_t(r)-r_f+\frac{1}{2}\sigma^2}{\gamma\sigma^2}$$

$$\left(E_t(r)-r_f+\frac{1}{2}\sigma^2\right)-\gamma\alpha_{t+1}\sigma^2=0\Rightarrow\alpha_{t+1}=\frac{E_t(r)-r_f+\frac{1}{2}\sigma^2}{\gamma\sigma^2}$$

Ser altså at porteføljesammensetningen vil være lik i begge periodene, dvs. at det vil være optimalt for investor å ikke rebalansere porteføljen mellom periode *t* og *t+1*. I tillegg ser vi at denne konstante porteføljeandelen er lik den vi fant for kortsiktige investorer.

Tilfelle 2 innebærer at investorene har log-nytte. Da vil porteføljevalget være myopisk selv når avkastningen ikke er IID. Dette kommer av at slike investorer også velger den porteføljen som maksimerer forventet log avkastning. En to-periodes log avkastning er lik summen av log avkastning for to enkeltperioder. Derfor blir summen maksimert ved å i enhver periode velge den porteføljen som er optimal for en log-investor med en periodes horisont.

Hva om vi har CRRA-nytte over konsum istedet for sluttformue? Dvs. at investorene bryr seg om levestandard mellom periode *t* og periode *t+K*, i tillegg til sluttformuen. Kan representere dette ved følgende nyttefunksjon:

$$U_t=E_t\sum_{i=0}^{\infty}\delta^i\frac{C_{t+i}^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$$

δ - tidspreferanseraten (jo høyere denne er, jo mer tålmodig er investor)

γ - relativ risikoaversjon

Antatt at vi ikke har noen inntekt vil budsjettbetingelsen for hver periode nå se slik ut;

$$W_{t+1}=\left(1+R_{p,t+1}\right)\left(W_t-C_t\right)$$

Videre vet vi at dette vil gi opphav til Euler ligninger for alle aktiva/porteføljer *j* slik;

$$U'\left(C_t\right)=E_t\left[\delta U'\left(C_{t+1}\right)\left(1+R_{j,t+1}\right)\right]$$

Gitt CRRA-nytte og at avkastning og konsumvekst er lognormalfordelt, har vi tidligere sett at vi kan skrive om Euler ligningen som følger:

$$C_t^{-\gamma} = E_t\left[\delta C_{t+1}^{-\gamma}\left(1+R_{j,t+1}\right)\right]$$

$$1 = E_t\left[\delta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}\left(1+R_{j,t+1}\right)\right]$$

Anta så at vi ser på den sikre avkastningen, $R_{f,t+1}$:

$$1 = \left(1+R_{f,t+1}\right)E_t\left[\delta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}\right]$$

$$\frac{1}{1+R_{f,t+1}} = E_t\left[\delta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}\right]$$

Tar så log av dette uttrykket og løser til slutt for forventet konsumvekst:

$$-r_{f,t+1} = \log\delta + \log E_t\left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}\right]$$

$$-r_{f,t+1} = \log\delta + E_t\left[\log\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}\right] + \frac{1}{2}\mathrm{var}_t\left[\log\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}\right]$$

$$-r_{f,t+1} = \log\delta + -\gamma E_t \log\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right) + \frac{1}{2}\gamma^2\,\mathrm{var}_t \log\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)$$

$$E_t\left(\Delta\log C_{t+1}\right) = \frac{\log\delta}{\gamma} + \frac{r_{f,t+1}}{\gamma} + \frac{1}{2}\gamma\sigma_C^2$$

Tolkning av dette uttrykket:

- Tålmodige investorer (høy δ) er mer villig til å spare, som gir høyere vekst i konsumet.
- Høyere risikofi rente gjør det mer lønnsomt å spare, og konsumet vil igjen øke over tid.
- Risikoaversjonen, γ, har flere effekter:
  - Høy risikoaversjon innebærer at investorene ønsker å jevne ut konsumet over tid. Dette innebærer at de to effektene ovenfor reduseres.
  - Høy usikkerhet i konsumet (dvs. høy σ_C^2) gjør at risikoaverse investorer ønsker å spare mer for å sikre tilstrekkelig høyt fremtidig konsum.

Videre har vi sett at Euler-ligningene med lognormalfordeling gir følgende uttrykk for meravkastningen på det risikable aktivumet (en versjon av CCAPM):

$$E_t r_{t+1} - r_{f,t+1} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 = \gamma\,\mathrm{cov}_t\left(r_{t+1},\Delta\log C_{t+1}\right)$$

Tidligere brukte vi denne til å forklare hva som bestemmer risikopremien. Nå skal vi ta risikopremien for gitt og søke å finne konsum- og porteføljeregler som oppfyller dette uttrykket.
Det er generelt vanskelig å løse denne typen problemer, men anta først at vi har et konstant forhold mellom konsum og formue (da kan modellen løses eksplisitt), og så lete etter betingelser der dette faktisk er optimalt:

$C_t / W_t = b$, der b er en konstant

Skriver da om budsjettbetingelsen som følger:

$$\frac{W_{t+1}}{W_t} = \left(1+R_{p,t+1}\right)\left(1-\frac{C_t}{W_t}\right)$$

$$\log\left(\frac{W_{t+1}}{W_t}\right)=\log\left(1+R_{p,t+1}\right)+\log\left(1-b\right)$$

$$\Delta w_{t+1}=r_{p,t+1}+\log\left(1-b\right)$$

Utnytt så at $r_{p,t+1}=r_{f,t+1}+\alpha_t\left(r_{t+1}-r_{f,t+1}\right)+\frac{1}{2}\alpha_t\left(1-\alpha_t\right)\sigma_t^2$

$$\Delta w_{t+1}=r_{f,t+1}+\alpha_t\left(r_{t+1}-r_{f,t+1}\right)+\frac{1}{2}\alpha_t\left(1-\alpha_t\right)\sigma_t^2+\log\left(1-b\right)$$

Merk videre at $\operatorname{var}_t\left(\Delta w_{t+1}\right)=\left(\alpha_t\sigma_t\right)^2$. Det konstante forholdet mellom C og W innebærer at formuesveksten er lik konsumveksten, dvs. at $\Delta w_{t+1}=\Delta c_{t+1}$. Vi finner dermed at fra uttrykket over at:

$$E_t r_{t+1}-r_{f,t+1}+\frac{1}{2}\sigma_t^2=\gamma\operatorname{cov}_t\left(r_{t+1},\Delta w_{t+1}\right)$$

$$E_t r_{t+1}-r_{f,t+1}+\frac{1}{2}\sigma_t^2=\gamma corr_t\left(r_{t+1},\Delta w_{t+1}\right)\sigma_t\alpha_t\sigma_t$$

$$E_t r_{t+1}-r_{f,t+1}+\frac{1}{2}\sigma_t^2=\gamma\alpha_t\sigma_t^2$$

$$\alpha_t=\frac{E_t r_{t+1}-r_{f,t+1}+\frac{1}{2}\sigma_t^2}{\gamma\sigma_t^2}$$

Ser her at vi igjen, under disse forutsetningene, kommer frem til den samme myopiske regelen.
Et konstant forhold mellom C og W er optimalt;

- Dersom avkastningen er IID
- Med log-nytte, selv uten IID avkastning.

Så langt har vi altså sett at den myopiske ("tradisjonelle") tilnærmingen kan være gyldig også på lang sikt, men at dette bygger på sterke forutsetninger. Skal nå se nærmere på tre avvik fra dette:

1) Tidsvarierende realrenter (kap. 3)
2) Prediksjonsmuligheter av fremtidig avkastning i aksjemarkedet (kap. 4)
3) Eksistens av arbeidsinntekt (kap. 6)

Tidsvarierende realrenter:
Den konsumbaserte modellen ovenfor er gyldig dersom investeringsmulighetene er konstante (dvs. at vi har IID avkastning). Skal nå se på konsekvensene av variasjon i mulighetene som følge av at realrenta varierer. Antar imidlertid at risikopremien er konstant, samt at alle varianser og kovarianser er konstante over tid. Når investeringsmulighetene ikke lenger er konstante over tid er det heller ikke lenger optimalt med et konstant forhold mellom C og W.
Anta nå at vi har Epstein-Zin preferanser. Disse beholder samme egenskaper som CRRA-nytte, men skaper et skille mellom relativ risikoaversjon og intertemporær substitusjonselastisitet. Med lognormal avkastning og konsumvekst har vi tidligere sett at slike preferanser gir opphav til risikopremien som kan uttrykkes ved:

$$E_t r_{t+1}-r_{f,t+1}+\frac{1}{2}\sigma_t^2=\frac{\theta}{\psi}\operatorname{cov}_t\left[r_{t+1},\Delta c_{t+1}\right]+\left(1-\theta\right)\operatorname{cov}_t\left[r_{t+1},r_{p,t+1}\right] \qquad (1)$$

Husk her at ψ gir uttrykk for den intertemporære substitusjonselastisiteten, og at $\theta=\frac{1-\gamma}{1-\frac{1}{\psi}}$.

Merk at når $\psi = \frac{1}{\gamma}$ får vi at $\theta = 1$, og vi står igjen med standardpreferansene. Med ett sikkert og ett usikkert aktivum er den siste kovariansen i uttrykket over gitt ved $\text{cov}_t\left[r_{t+1}, r_{p,t+1}\right] = \alpha_t \sigma_t^2$.

Med ikke-konstant forhold mellom konsum og formue er utfordringen nå å finne et uttrykk for den første kovariansen. Campbell & Viceira viser at man kan finne følgende approksimasjon for sammenhengen mellom konsum og porteføljeavkastning:

$$c_{t+1} - E_t c_{t+1} = r_{p,t+1} - E_t r_{p,t+1} + (1-\psi)(E_{t+1} - E_t)\sum_{j=1}^{\infty} \rho^j r_{p,t+1+j} \tag{2}$$

Tolkning av (2):

- Venstre side viser "overraskelsen" i konsumet, dvs. avviket mellom faktisk og forventet konsumnivå.
- Høyre side viser at dette kan komme av to årsaker:
    - Overraskelse i porteføljeavkastning. Høyere avkastning enn forventet vil medføre høyere konsum enn forventet.
    - Dersom ny informasjon kommer frem og endrer forventningene til fremtidig avkastning vil dette slå ut i konsumet. Effekten av dette avhenger av ψ :
        - Dersom $\psi < 1$ vil inntektseffekten av at økt forventet fremtidig avkastning vil øke dagens konsum dominere substitusjonseffekten av at økt forventet avkastning styrker insentivene til å spare mer. Dermed vil en økning i forventede avkastninger medføre økt konsum.
        - Dersom $\psi > 1$ vil derimot substitusjonselastisiteten dominere.

Fra (2) kan man finne et uttrykk for konsumveksten gitt ved;

$$\Delta c_{t+1} = r_{p,t+1} + (1-\psi)(E_{t+1} - E_t)\sum_{j=1}^{\infty} \rho^j r_{p,t+1+j}$$

for å finne et uttrykk for den første kovariansen i (1):

$$\text{cov}_t\left[r_{t+1}, \Delta c_{t+1}\right] = \text{cov}_t\left[r_{t+1}, r_{p,t+1} + (1-\psi)(E_{t+1} - E_t)\sum_{j=1}^{\infty} \rho^j r_{p,t+1+j}\right]$$

$$\text{cov}_t\left[r_{t+1}, \Delta c_{t+1}\right] = \text{cov}_t\left[r_{t+1}, r_{p,t+1}\right] + (1-\psi)\text{cov}_t\left[r_{t+1}, (E_{t+1} - E_t)\sum_{j=1}^{\infty} \rho^j r_{p,t+1+j}\right]$$

$$\text{cov}_t\left[r_{t+1}, \Delta c_{t+1}\right] = \alpha_t \sigma_t^2 + (1-\psi)\text{cov}_t\left[r_{t+1}, (E_{t+1} - E_t)\sum_{j=1}^{\infty} \rho^j r_{f,t+1+j}\right] \tag{3}$$

Merk at man i den siste linja skifter fra porteføljeavkastningen til risikofri avkastning. Dette kommer av at risikopremien er konstant og dermed vil all variasjon i porteføljeavkastningen kunne forklares av variasjonen i risikofri rente. Ved å sette inn uttrykkene for kovariansene i (1) finner vi at:

$$E_t r_{t+1} - r_{f,t+1} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 = \frac{\theta}{\psi}\left[\alpha_t \sigma_t^2 + (1-\psi)\text{cov}_t\left[r_{t+1}, (E_{t+1} - E_t)\sum_{j=1}^{\infty} \rho^j r_{f,t+1+j}\right]\right] + (1-\theta)\alpha_t \sigma_t^2$$

$$E_t r_{t+1} - r_{f,t+1} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 = \frac{\theta}{\psi}(1-\psi)\text{cov}_t\left[r_{t+1}, (E_{t+1} - E_t)\sum_{j=1}^{\infty} \rho^j r_{f,t+1+j}\right] + \left(1 - \theta + \frac{\theta}{\psi}\right)\alpha_t \sigma_t^2 \tag{4}$$

Utnytter så at;

$$\theta = \frac{1-\gamma}{1-\frac{1}{\psi}}$$

og skriver da om vektene i (4) over til følgende;

$$\frac{\theta}{\psi}(1-\psi)=\frac{1}{\psi}\frac{1-\gamma}{1-\frac{1}{\psi}}(1-\psi)=\frac{1-\gamma}{\psi-1}(1-\psi)=\gamma-1$$

$$\left(1-\theta+\frac{\theta}{\psi}\right)=1-\frac{1-\gamma}{1-\frac{1}{\psi}}+\frac{1}{\psi}\frac{1-\gamma}{1-\frac{1}{\psi}}=\frac{\psi-1}{\psi-1}-\frac{\psi(1-\gamma)}{\psi-1}+\frac{1-\gamma}{\psi-1}=\frac{\gamma(\psi-1)}{\psi-1}=\gamma$$

Utnytter dette og skriver om (4) til:

$$E_t r_{t+1}-r_{f,t+1}+\frac{1}{2}\sigma_t^2=(\gamma-1)\text{cov}_t\left[r_{t+1},(E_{t+1}-E_t)\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j r_{f,t+1+j}\right]+\gamma\alpha_t\sigma_t^2 \tag{5}$$

Løser så (5) for α_t:

$$\alpha_t=\frac{E_t r_{t+1}-r_{f,t+1}+\frac{1}{2}\sigma_t^2}{\gamma\sigma_t^2}-\frac{\gamma-1}{\gamma\sigma_t^2}\text{cov}_t\left[r_{t+1},(E_{t+1}-E_t)\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j r_{f,t+1+j}\right]$$

$$\alpha_t=\frac{1}{\gamma}\frac{E_t r_{t+1}-r_{f,t+1}+\frac{1}{2}\sigma_t^2}{\sigma_t^2}+\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{1}{\sigma_t^2}\text{cov}_t\left[r_{t+1},-(E_{t+1}-E_t)\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j r_{f,t+1+j}\right] \tag{6}$$

Ser av (6) her at dersom $\gamma = 1$, så står vi igjen med den myopiske løsningen.
Etterspørselen etter det usikre aktivumet er altså et vektet gjennomsnitt av to komponenter:

- Den første delen er den myopiske etterspørselen, dvs. den vanlige avveiningen av forventet avkastning mot risiko.
- Den andre delen avhenger av kovariansen mellom aktivumet og reduksjoner i forventet fremtidig avkastning. Dette refereres til som intertemporær sikringsetterspørsel (intertemporal hedging demand).

Merk her følgende:

- Hvis risikofri rente er konstant er kovariansen lik null (dvs. avkastningen er IID), og vi står igjen med myopisk tilpasning. Dersom vi har log nytte er $\gamma = 1$ og vi står da også igjen med myopisk tilpasning.
- For en svært konservativ investor (dvs. en investor med høy γ) vil den myopiske etterspørselen bety lite. En slik investor vil kun kjøpe usikkert aktivum dersom dets avkastning er positivt korrelert med et fall i risikofri rente.

<u>Porteføljevalg når avkastning kan predikeres</u>:
Hva om aksjeavkastningen ikke er IID, men at usikkerheten til aksjeavkastningen avtar med investeringshorisonten? Dette tyder på predikerbarhet i aksjemarkedet (ref. Bibelen; "etter sju magre kommer sju fete"). Det observeres at variansen i aksjeavkastningen har avtatt med investeringshorisonten, dvs. at markedet har vært såkalt *mean-reverting*.
Ser nå på en modell med ett sikkert og ett usikkert aktivum, og antar en konstant risikofri rente med log avkastning, r_f. Antar videre at log avkastning på usikkert aktivum er gitt som;

$$r_{t+1}=E_t r_{t+1}+u_{t+1} \qquad \text{der} \qquad u_{t+1}\sim N\left(0,\sigma_u^2\right)$$

Definerer så log forventet meravkastning tilknyttet det risikable aktivumet som;

$$x_t=E_t r_{t+1}-r_f+\frac{1}{2}\sigma_u^2$$

og at *x* her følger en såkalt AR(1)-prosess med gjennomsnitt μ og persistens ϕ:

$$x_{t+1}=\mu+\phi(x_t-\mu)+\eta_{t+1} \qquad \text{der} \qquad \eta_{t+1}\sim N\left(0,\sigma_\eta^2\right)$$

Kan se på *x* som en tilstandsvariabel, dvs. investeringsmulighetene på ethvert tidspunkt.
La så $\operatorname{cov}(u_{t+1}, \eta_{t+1}) = \sigma_{u,\eta}$. Dette er kovariansen mellom avkastningen på det sikre aktivumet og tilstandsvariabelen. Således er kovariansen et mål på i hvilken grad det usikre aktivumet kan brukes til å sikre seg mot variasjon i investeringsmulighetene. Vi har altså fra (4.8):

$$\operatorname{cov}(r_{t+1}, x_{t+1}) = \operatorname{cov}\left(r_{t+1}, \left(E_t r_{t+2} - r_f + \frac{\sigma_u^2}{2} \right) \right)$$

Setter så inn fra (4.7):

$$\operatorname{cov}(r_{t+1}, x_{t+1}) = \operatorname{cov}\left(r_{t+1}, \left(r_{t+2} - u_{t+2} - r_f + \frac{\sigma_u^2}{2} \right) \right) = \operatorname{cov}(r_{t+1}, r_{t+2}) = \sigma_{u,\eta}$$

Videre ser vi på tilfellet der $\sigma_{u,\eta} < 0$, da dette er konsistent med *mean-reversion*. Dersom vi har en uventet høy avkastning idag, så reduseres forventet avkastning i fremtiden. Dette innebærer at den betingede variansen knyttet til langsiktig aksjemarkedsavkastning, siden:

$$\operatorname{var}(r_{t+1} + r_{t+2}) = 2\operatorname{var}(r_{t+1}) + 2\operatorname{cov}(r_{t+1}, r_{t+2}) = 2\operatorname{var}(r_{t+1}) + 2\sigma_{u,\eta} < 2\operatorname{var}(r_{t+1})$$

Variansen vokser altså mindre enn proporsjonalt med horisonten, dvs. at aksjer virker relativt sett tryggere for mer langsiktige investorer.

Porteføljevalget har Campbell og Viceira vist at kan skrives som følger:

$$\alpha_t = a_0 + a_1 x_t$$

der;

$$a_0 = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\left[\left(\frac{b_1}{1-\psi}\right) + 2\mu(1-\phi)\left(\frac{b_2}{1-\psi}\right)\right]\left(-\frac{\sigma_{\eta u}}{\sigma_u^2}\right)$$

og;

$$a_1 = \frac{1}{\gamma\sigma_u^2} + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\left[2\phi\left(\frac{b_2}{1-\psi}\right)\right]\left(-\frac{\sigma_{\eta u}}{\sigma_u^2}\right)$$

Tolkning av dette:

- Den optimale allokeringen varierer nå over tid. Dersom $\sigma_{\eta u} = 0$, så reduseres parameteren til $\alpha_t = \frac{x_t}{\gamma\sigma_u^2}$, som er ekvivalent med den myopiske tilpasningen vi har sett tidligere.
- Hele a_0 og siste delen av a_1 viser investorenes sikringsetterspørsel. Merk at dersom $\gamma = 1$, forsvinner denne. Dersom $\gamma < 1$, blir denne sikringsetterspørselen negativ, men dersom $\gamma > 1$ (dvs. vi ser på konservative investorer), vil sikringsetterspørselen være positiv selv dersom forventet meravkastning, *x*, den perioden er null. Dette er en stor forskjell fra mer kortsiktige modeller.
- En forklaring til dette er en tendens til at aksjene gir høy realisert avkastning når den fremtidige forventede avkastningen faller. Et fall i forventet fremtidig avkastning kan anses som en forverring av investeringsmulighetene. En konservativ investor vil ønske å sikre seg mot en slik forverring ved å holde aktiva som gir økt formue/konsummuligheter når investeringsmulighetene er dårlige. Dette gjør aksjene når $\sigma_{\eta u} < 0$ (se figur 4.1 i boka).

Aksjer har altså mindre risiko på lang sikt dersom det er slik *mean-reversion* i aksjeavkastningen, men det betyr ikke at det er optimalt å øke den konstante aksjeandelen som i myopiske modeller. Det optimale i dette tilfellet er å drive såkalt markedstiming.

Humankapital, arbeidsinntekt og porteføljevalg:
Skal nå ta hensyn til at investors formue ikke kun består av finansformue. Andre typer formue kan være humankapital som vil gi arbeidsinntekt, eller som at pensjonsfondet har oljereserver på bunnen av Nordsjøen. Arbeidsinntekt kan betraktes som utbytte betalt på humankapital, og den store forskjellen fra annen formue er at humankapitalen i seg selv ikke er omsettelig.
Tenker oss at investor har en sikker strøm av arbeidsinntekt.
Ser så på en modell med CRRA-nytte, ett sikkert og ett usikkert aktivum, samt IID avkastning. Log forventet meravkastning er da gitt ved;

$$E_t r_{t+1} - r_f + \frac{1}{2}\sigma^2 \equiv \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$$

der σ^2 er den konstante variansen knyttet til avkastningen på det usikre papiret.

La så H_t være investors humanformue i periode *t*, slik at $W_t + H_t$ er total formue. Dersom det faktisk var slik at humanformuen kunne omsettes, ville vi fått at optimalt beløp investert i det usikre aktivumet ville være:

$$\hat{\alpha}(W_t + H_t) = \frac{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}{\gamma\sigma^2}(W_t + H_t)$$

der porteføljeandelen, $\hat{\alpha}$, er konstant over tid. Resterende formue ville vært investert i det risikofrie alternativet.

I praksis derimot, vil investor være tvunget til å holde humanformuen. Denne er lik den neddiskonterte verdien av all fremtidig arbeidsinntekt. Sagt anneredes; humanformuen med sikker arbeidsinntekt er ekvivalent med et beløp, H_t, investert risikofritt. Investoren kan dermed replikere allokeringen de ville foretatt hvis humanformuen kunne omsettes, ved å investere det samme beløpet i det usikre aktivumet.
Andelen av finansformuen som optimalt plasseres usikkert er dermed;

$$\alpha = \frac{\hat{\alpha}(W_t + H_t)}{W_t} = \frac{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}{\gamma\sigma^2}\left(1 + \frac{H_t}{W_t}\right)$$

Ser av dette uttrykket at dersom vi ikke har humanformue (dvs. $H = 0$), så reduseres løsningen til den for myopisk allokering. Med (positiv) humankapital vil andelen av finansformuen investert i det usikre aktivumet øke.
Altså bør en investor som har en risikofri arbeidsinntekt, vri sin portefølje mot aksjer, sammenlignet med en investor som kun har finansinntekter.

- Merk at forholdet $\frac{H_t}{W_t}$ er ofte høyt tidlig i livsløpet, og det vil typisk synke med alderen.
- Innebærer at man bør holde relativt mer aksjer som ung enn som gammel. Dette er i tråd med finansielle rådgivere (f.eks. Storebrands generasjonsfond som trapper gradvis ned aksjeandelen mot pensonsalderen).
- Analogi til oljefondet: dersom de ikke utvunnede reservene hadde vært risikofrie, burde en enda større andel av fondet vært allokert til aksjemarkedet.

Tidsvarierende portføljeandeler:

- Tenk at finansformuen har økt sterkt en periode.
- Dette innebærer at forholdet $\frac{H_t}{W_t}$ reduseres, og dermed at andelen av finansformuen investert i aksjemarkedet reduseres.
- Investor bør altså redusere aksjeeksponeringen etter en periode hvor aksjemarkedet har gått bra.

En statisk modell for porteføljevalg når arbeidsinntekt ikke er risikofri.
Definerer nytte som følger;

$$\max_{\alpha_t} E_t\left[\delta^t \frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right]$$

Antar videre at arbeidstilbudet og dermed arbeidsinntekten er eksogen, og kan dermed utelate fritid fra nyttefunksjonen. Budsjettbetingelsen blir her som følger;

$$W_{t+1} = \left(1 + R_{p,t+1}\right)W_t + L_{t+1}$$

der porteføljeavkastningen er;

$$R_{p,t+1} = \alpha_t\left(R_{t+1} - R_f\right) + R_f$$

Antar videre konstante investeringsmuligheter, dvs. log risikofri rente er gitt ved r_f, forventet log meravkastning er gitt ved $E_t\left(r_{t+1} - r_f\right) \equiv \mu$, og variansen til innovasjonen i log avkastning er konstant og lik σ_u^2. Arbeidsinntekten er lognormalfordelt: $l_{t+1} \equiv \log L_{t+1} \sim N\left(l, \sigma_l^2\right)$

Kan ha en vilkårlig korrelasjon mellom avkastningen på det usikre papiret og realisert arbeidsinntekt, dvs. $\operatorname{cov}_t\left(l_{t+1}, r_{t+1}\right) \equiv \sigma_{lu}$. Videre for å løs modellen er vi nødt til å bruke approksimasjonen til porteføljeavkastningen (gitt ved 2.21 i boka):

$$r_{p,t+1} = r_{f,t+1} + \alpha_t\left(r_{t+1} - r_{f,t+1}\right) + \frac{1}{2}\alpha_t\left(1 - \alpha_t\right)\sigma_t^2$$

Kan vises at ved bruk av Taylor-approksimasjon av budsjettbetingelsen (se ligning 6.5 – 6.8 i boka), så kan log sluttkonsum skrives som;

$$c_{t+1} \approx k + \rho\left(w_t + r_{p,t+1}\right) + \left(1-\rho\right)l_{t+1}$$

der k er en konstant, mens $0 < \rho < 1$ er en parameter som følger av lineariseringen.

Fra Euler-ligningene for optimale investeringer i de to aktivaenehar vi fortsatt en variant av CCAPM. Tar utgangspunkt i ligning 2.37 i boka:

$$E_t\left[\delta C_{t+1}^{-\gamma}\left(1 + R_{t+1}\right)\right] = E_t\left[\delta C_{t+1}^{-\gamma}\left(1 + R_f\right)\right]$$

$$E_t\left[C_{t+1}^{-\gamma}\left(1 + R_{t+1}\right)\right] = E_t\left[C_{t+1}^{-\gamma}\left(1 + R_f\right)\right]$$

tar så log på begge sider:

$$\log E_t\left[C_{t+1}^{-\gamma}\left(1 + R_{t+1}\right)\right] = \log E_t\left[C_{t+1}^{-\gamma}\left(1 + R_f\right)\right]$$

$$E_t\left(\log\left[C_{t+1}^{-\gamma}\left(1 + R_{t+1}\right)\right]\right) + \frac{1}{2}\operatorname{var}_t\left(\log\left[C_{t+1}^{-\gamma}\left(1 + R_{t+1}\right)\right]\right) = E_t\left(\log\left[C_{t+1}^{-\gamma}\left(1 + R_f\right)\right]\right) + \frac{1}{2}\operatorname{var}_t\left(\log\left[C_{t+1}^{-\gamma}\left(1 + R_f\right)\right]\right)$$

$$E_t\left(-\gamma c_{t+1}\right) + E_t\left(r_{t+1}\right) + \frac{1}{2}\left[\operatorname{var}_t\left(-\gamma c_{t+1}\right) + \operatorname{var}_t\left(r_{t+1}\right) - 2\gamma \operatorname{cov}_t\left(c_{t+1}, r_{t+1}\right)\right] = E_t\left(-\gamma c_{t+1}\right) + r_f + \frac{1}{2}\operatorname{var}_t\left(-\gamma c_{t+1}\right)$$

$$E_t\left(r_{t+1}\right) + \frac{1}{2}\left[\operatorname{var}_t\left(r_{t+1}\right) - 2\gamma \operatorname{cov}\left(c_{t+1}, r_{t+1}\right)\right] = r_f$$

$$E_t\left(r_{t+1}\right) - r_f + \frac{1}{2}\operatorname{var}_t\left(r_{t+1}\right) = \gamma \operatorname{cov}_t\left(c_{t+1}, r_{t+1}\right)$$

$$E_t\left(r_{t+1}\right) - r_f + \frac{1}{2}\sigma_u^2 = \gamma \operatorname{cov}_t\left(c_{t+1}, r_{t+1}\right)$$

Setter så inn fra (6.8) i boka, slik at:

$$E_t\left(r_{t+1}\right) - r_f + \frac{1}{2}\sigma_u^2 = \gamma \operatorname{cov}_t\left(k + \rho\left(w_t + r_{p,t+1}\right) + \left(1-\rho\right)l_{t+1}, r_{t+1}\right)$$

$$E_t(r_{t+1}) - r_f + \frac{1}{2}\sigma_u^2 = \gamma\left[\operatorname{cov}_t(k, r_{t+1}) + \operatorname{cov}_t(\rho w_t, r_{t+1}) + \operatorname{cov}_t(\rho r_{p,t+1}, r_{t+1}) + \operatorname{cov}_t((1-\rho) l_{t+1}, r_{t+1})\right]$$
$$E_t(r_{t+1}) - r_f + \frac{1}{2}\sigma_u^2 = \gamma\left[\rho \operatorname{cov}_t(r_{p,t+1}, r_{t+1}) + (1-\rho)\operatorname{cov}_t(l_{t+1}, r_{t+1})\right]$$
$$E_t(r_{t+1}) - r_f + \frac{1}{2}\sigma_u^2 = \gamma\left[\rho\alpha_t\sigma_u^2 + (1-\rho)\sigma_{l,u}\right]$$

Løser så for α_t og finner;

$$\alpha_t = \frac{1}{\rho}\frac{E_t(r_{t+1}) - r_f + \frac{1}{2}\sigma_u^2}{\gamma\sigma_u^2} + \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)\frac{\sigma_{l,u}}{\sigma_u^2}$$

Dette er uttrykk (6.11) i boka. Ser her at optimal allokering til det usikre alternativet igjen er en vektet sum av den myopiske tilpasningen og en sikringsetterspørsel. Ser at dersom arbeidsinntektsrisikoen er idiosynkratisk (dvs. at arbeidsinntektsrisikoen er uten sammenheng med annen risiko, $\sigma_{l,u} = 0$), så vil investoren ikke ha noen slik sikringsetterspørsel. Siden vi har at $0 < \rho < 1$, så ser vi at dersom arbeidsinntekten er negativt korrelert med avkastningen, dvs. $\sigma_{l,u} < 0$, så vil etterspørselen etter det usikre aktivumet øke, siden dette da vil fungere som en *hedge* mot fluktuasjoner i arbeidsinntekt.

Anta nå at investorene kan selv velge hvor mye de skal jobbe. Kan da definere nyttefunksjonen som;

$$U(C_{t+1}, N_{t+1}) = \frac{C_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \theta\frac{(1-N_{t+1})^{1-\lambda}}{1-\lambda}$$

Her er $(1 - N_{t+1})$ å tolke som investorens fritid, og dermed er N_{t+1} den tiden investoren bruker på å jobbe. λ sier noe om *uviljen* til å variere arbeidstiden (på samme måte som risikoaversjonen måler en *uvilje* til å variere konsumet), mens θ er en skaleringsparameter som forteller noe om viktigheten av fritid vs konsum.

For å avgjøre hva som er optimalt arbeidstilbud må vi forstå at førsteordensbetingelse må være at den marginale ulempen av arbeid må være lik reallønn multiplisert med marginalnytten av konsum. Definerer Z_{t+1} som reallønna. Den marginale ulempen ved arbeid finnes ved;

$$-\frac{\partial U}{\partial N} = \theta(1 - N_{t+1})^{-\lambda}$$

Den marginale nytten av konsum kjenner vi igjen som;

$$\frac{\partial U}{\partial C} = C_{t+1}^{-\gamma}$$

Ved å kombinere disse to, kan vi skrive førsteordensbetingelsen som;

$$Z_{t+1}C_{t+1}^{-\gamma} = \theta(1 - N_{t+1})^{-\lambda}$$

Merk at dette gir opphav til mer usikkerhet. Siden arbeidsinntekt er $L_{t+1} = N_{t+1}Z_{t+1}$, og investorene selv kan bestemme hvor mye de ønsker å jobbe, så vil usikkerheten i arbeidsinntekt avhenge av usikkerheten i reallønna.

Det kan vises at førsteordensbetingelsen ovenfor kan skrives på log-form som følger;

$$\eta_{t+1} = v(z_{t+1} - \gamma c_{t+1} - k)$$

hvor $v > 0$ er arbeidstilbudselastisiteten mhp reallønna.

Ved å sette dette uttrykket inn i uttrykket for den approksimerte budsjettbetingelsen får vi;

$$c_{t+1} \approx k + \rho(w_t + r_{p,t+1}) + (1-\rho)v(z_{t+1} - \gamma c_{t+1} - k)$$
$$c_{t+1}(1 + (1-\rho)\gamma v) = k(1 - v(1-\rho)) + \rho(w_t + r_{p,t+1}) + v(1-\rho)z_{t+1}$$

$$c_{t+1} = \frac{k\left(1-v\left(1-\rho\right)\right)}{\left(1+\left(1-\rho\right)\gamma v\right)} + \frac{\rho}{\left(1+\left(1-\rho\right)\gamma v\right)}\left(w_t + r_{p,t+1}\right) + \frac{v\left(1-\rho\right)}{\left(1+\left(1-\rho\right)\gamma v\right)} z_{t+1}$$

$$c_{t+1} = k^* + \beta_w\left(w_t + r_{p,t+1}\right) + \beta_z z_{t+1}$$

Merk her at dersom v blir veldig stor, har vi et tilfelle med fast/eksogent arbeidstilbud siden investor da vil jobbe like mye uansett lønn. Generelt vil det være slik at $0 \le \beta_w \le \rho$ og $\beta_z \ge 0$.

Ved å benytte denne budsjettbetingelsen kan vi nå vise at optimal porteføljeallokering er gitt som;

$$\alpha_t = \frac{1}{\beta_w}\frac{E_t\left(r_{t+1}\right) - r_f + \frac{1}{2}\sigma_u^2}{\gamma\sigma_u^2} - \frac{\beta_z}{\beta_w}\frac{\sigma_{l,u}}{\sigma_u^2}$$

Her kan vi se at det første leddet er enda større enn med eksogent arbeidstilbud, siden $0 \le \beta_w \le \rho$. Dersom inntektsrisikoen er idiosynkratisk har vi altså at fleksibilitet mht arbeidstid ytterligere øker optimal andel investert usikkert. Siden investor nå kan justere arbeidsinnsatsen (f.eks. ved å jobbe mer i dårlige tider) er de bedre rustet mot finansiell risiko. Koeffisienten $\frac{\beta_z}{\beta_w}$ er større jo større v er. Jo lettere arbeidsinnsatsen justeres, jo mer opptatt er investor av eventuell korrelasjon mellom arbeidsinntekt og avkastning. Slike investorer reagerer på lønnsendringer med en kraftig endring av arbeidstilbudet, slik at lønnssjokk har kraftig effekt arbeidsinntekten. Dermed blir eventuell korrelasjon viktig i porteføljevalget.

Anta så at investor har konsumforpliktelser (f.eks. er skyldig nedbetalinger av størrelsesorden *X*).

Antar da at investoren har samme budsjettbetingelse som tidligere;

$$C_{t+1} = W_{t+1} = \left(1 + R_{p,t+1}\right)W_t$$

Men at overskuddskonsumet, dvs. den andelen av formuen som er tilgjengelig for valgfritt konsum, er definert som;

$$C_{t+1}^* = C_{t+1} - X_{t+1}$$

Når dette er gitt kan budsjettbetingelsen omskrives til;

$$C_{t+1}^* = \left(1 + R_{p,t+1}\right)W_t - X_{t+1}$$

Tenker oss at forpliktelsen er konstant og at det finnes et risikofritt aktiva med avkastning R_f, slik at man kan sikre forpliktelsene sine ved å investere et beløp $\frac{X_{t+1}}{1+R_f}$ risikofritt. Antar så at investor allokerer resten av formuen sin som en investor uten forpliktelsen, dvs. at andelen av overskuddsformuen som investeres usikkert er;

$$\hat{\alpha}_t = \frac{E_t\left(r_{t+1}\right) - r_f + \frac{1}{2}\sigma_u^2}{\gamma\sigma_u^2}$$

Andelen av den totale formuen, investert usikkert blir dermed:

$$\alpha W_t = \hat{\alpha}_t\left(W_t - \frac{X_{t+1}}{1+R_f}\right) = \frac{E_t\left(r_{t+1}\right) - r_f + \frac{1}{2}\sigma_u^2}{\gamma\sigma_u^2}\left(W_t - \frac{X_{t+1}}{1+R_f}\right)$$

$$\alpha = \frac{E_t\left(r_{t+1}\right) - r_f + \frac{1}{2}\sigma_u^2}{\gamma\sigma_u^2}\left(1 - \frac{X_{t+1}}{\left(1+R_f\right)W_t}\right) < \frac{E_t\left(r_{t+1}\right) - r_f + \frac{1}{2}\sigma_u^2}{\gamma\sigma_u^2}$$

Allokeringen til det usikre aktivumet er altså mindre enn for en investor uten konsumforpliktelsen.