ECONnect NTNU

# Faktor

**- en eksamensavis utgitt av ECONnect**

## Pensumsammendrag:
## SØK3005 – Informasjons- og markedsteori


Forfatter: Drago Bergholt
E-post: bergholt@stud.ntnu.no

Skrevet: Våren 2009
Antall sider: 45

## Om ECONnect:

ECONnect er en frivillig studentorganisasjon for studentene på samfunnsøkonomi- og finansøkonomistudiet ved NTNU. Vi arbeider for økt faglig kompetanse blant våre studenter samt tettere kontakt med næringslivet. Det gjør vi ved å arrangere fagdager, gjesteforelesninger, bedriftspresentasjoner m.m. I dag går det ca. 200 studenter på bachelornivå (1.-3. klasse) og ca. 70 studenter på masternivå (4.-5. klasse). Studentene på masternivå er fordelt på de to linjene samfunnsøkonomi (ca. 50 stk) og finansiell økonomi (ca. 20 stk). Mer om ECONnect og aktuelle arrangementer på www.econnect-ntnu.no.

ECONnect består av følgende personer ved utgivelsestidspunkt:


| | |
|---|---|
| Bjørn Bergholt (Leder) | bjorn@econnect-ntnu.no |
| Sophie S. Strømman (Bedriftsansvarlig) | sophie@econnect-ntnu.no |
| Maiken Weidle (Fagdagsansvarlig) | maiken@econnect-ntnu.no |
| Joakim Bjørkhaug (Økonomi- og IT-ansvarlig) | joakim@econnect-ntnu.no |
| Elise Caspersen | elise@econnect-ntnu.no |
| Tiril Toftedahl | tiril@econnect-ntnu.no |
| Louis Dieffenthaler | louis@econnect-ntnu.no |
| Andreas H. Jung | andreas@econnect-ntnu.no |
| Mari Benedikte Ellingsen | mari@econnect-ntnu.no |
| Herman Westrum Thorsen | herman@econnect-ntnu.no |

| *Post- og besøksadresse:* | *Organisasjonsnummer:* | *Hjemmeside:* |
|---|---|---|
| ECONnect, NTNU Dragvoll<br>Institutt for samfunnsøkonomi<br>Bygg 7, Nivå 5<br>7491 Trondheim | NO 994 625 314 | www.econnect-ntnu.no |


*Merk: Alle pensumsammendrag og tekster som utgis av Faktor er skrevet av og for studenter. ECONnect står ikke ansvarlig for selve faginnholdet. Spørsmål om teksten kan rettes til tekstforfatteren.*

# 1. Statiske spill med komplett informasjon

## 1.1. Grunnleggende teori: Spill på normalform og Nash-likevekten

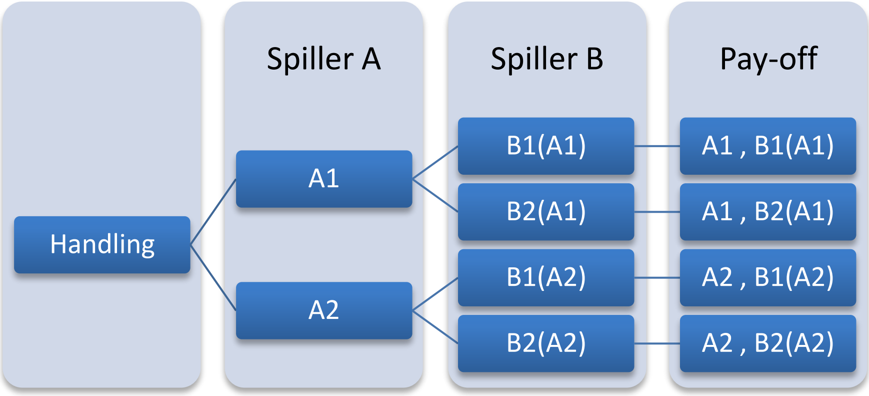
- Spill: ”*En beslutningssituasjon med flere aktører som bevisst påvirker hverandre gjennom sine handlinger.”*
- Strategi: *”Et sett av instruksjoner som sier hvilken handling en spiller skal velge i hver tenkelige situasjon.”*
- Payoff: *”Nytten som følger med hvert enkelt sett med handlinger.”*
- Nash-likevekt:
  - *”Tilstand der ingen spillere angrer sine strategivalg når motpartens valg av strategi blir kjent.”*
  - Delspillperfekt Nash-likevekt: *”Tilstand som gir Nash-likevekt både for hele spillet og i hvert trinn av spillet.”*
- Spillets trekkrekkefølge:
  - Statiske spill: *”Spill med én handling per spiller, spillerne handler simultant.”*
  - Dynamisk spill: *”Spill med mer enn én periode, spillerne handler simultant eller sekvensielt.”*
- Payoff-matrise:

| | | **B** | |
|---|---|---|---|
| | | Handling $B_1$ | Handling $B_2$ |
| **A** | Handling $A_1$ | $A_1(B_1)\,,B_1(A_1)$ | $A_1(B_2)\,,B_2(A_1)$ |
| | Handling $A_2$ | $A_2(B_1)\,,B_1(A_2)$ | $A_2(B_2)\,,B_2(A_2)$ |

- Sekvensielt spill på normalform:

| | | **B** | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | S1 | S2 | S3 | S4 |
| **A** | Handling $A_1$ | $A_1\,,B_1(A_1)$ | $A_1\,,B_1(A_1)$ | $A_1\,,B_2(A_1)$ | $A_1\,,B_2(A_1)$ |
| | Handling $A_2$ | $A_2\,,B_1(A_2)$ | $A_2\,,B_2(A_2)$ | $A_2\,,B_1(A_2)$ | $A_2\,,B_2(A_2)$ |

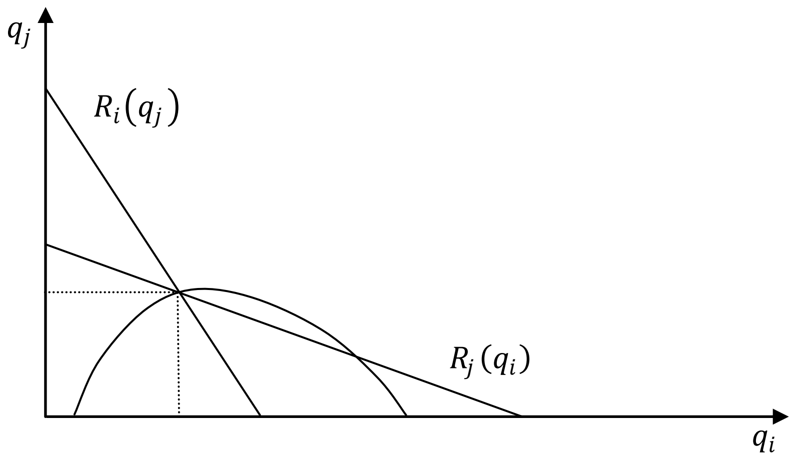
- Sekvensielt spill på ekstensiv form:




- Spill på normalform:
  - Spesifiserer:
    - Spillerne i spillet.
    - Strategiene tilgjengelig for hver spiller:
      $S_i = \{s_1, \ldots, s_n\} \quad \Rightarrow \quad s_i \in S_i$
    - Pay-off tilknyttet hver enkelt strategikombinasjon for hver enkelt spiller:
      $u_i(s_1, \ldots, s_n)$
  - Hver spiller trekker simultant, kombinasjonen av spillernes strategier bestemmer hver enkelts pay-off.
  - Spillet: $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$
- Iterert eliminering: Beregning av samme prosess flere ganger med tanke på å finne best mulige resultat.
- Strengt dominerende strategi:
  - *"Strategi som gir spilleren høyere payoff enn enhver annen strategi, uansett hva motparten velger."*
  - Anta at $s_i'$ og $s_i''$ begge inngår i $S_i$. Da er strategi $s_i'$ strengt dominerende strategi over $s_i''$ hvis $u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \ldots, s_n) > u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, \ldots, s_n)$.
- Strengt dominert strategi:
  - *"Strategi som gir spilleren lavere payoff enn enhver annen strategi, uansett hva motparten velger."*
  - Anta at $s_i'$ og $s_i''$ begge inngår i $S_i$. Da er strategi $s_i'$ strengt dominert av strategi $s_i''$ hvis $u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \ldots, s_n) < u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, \ldots, s_n)$.
- Nash-likevekt: $s_i^*$ er en Nash-likevekt hvis dette er spiller $i$'s beste respons på strategiene til de $n-1$ andre spillerne:
  $u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$ der $s_i \in S_i$
  $\Rightarrow \quad s_i^*$ løser problemet $max_{s_i \in S_i}\, u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$

## 1.2. Anvendelse

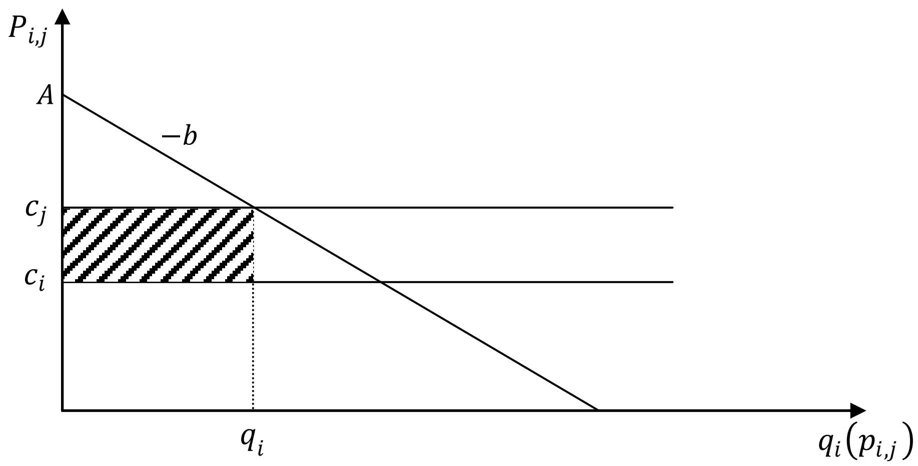
- Cournot-modell med duopol:
  - Prisfunksjon for markedet: $P(Q) = A - bQ = A - b(q_i + q_j)$
  - Profittfunksjon: $\pi_i = (P(Q) - c_i)q_i - F_i = (A - b(q_i + q_j) - c_i)q_i - F_i$
  - Reaksjonsfunksjon ved profittmaksimering: $q_i = \frac{A-c_i}{2b} - \frac{1}{2}q_j \equiv R_i(q_j)$
  - Finner profittmaksimerende kvantum ved å sette $R_j(Q_i)$ inn i $R_i(Q_j)$ og løse ut for $Q_i$. Dette gir: $q_i^* = \frac{A-2c_i+c_j}{3b}$
  - Likevektspris: $P = \frac{A+c_i+c_j}{3}$
  - Profitt:
    - Hvis $c_i = c_j = c \quad \Rightarrow \quad \pi_i = \frac{(A-c)^2}{9b} - F_i$
    - Hvis $c_i \neq c_j \quad \Rightarrow \quad \pi_i = \frac{(A-2c_i+c_j)(A-2c_j+c_i)}{9b} - F_i$




- Cournot-modell med $n$ bedrifter:
  - Antar $c_1 = c_2 = \cdots = c_n \equiv c$. Dette gir $q_1 = q_2 = \cdots = q_n \equiv q^C$
  - Totalt kvantum i markedet: $Q = nq^C = (n-1)q^C + q_i$ der $q_i = q^C$
  - Prisfunksjon for markedet: $P(Q) = A - bQ = A - b((n-1)q^C + q_i)$
  - Profitt for bedrift $i$:
    - Profittfunksjon: $\pi_i = (A - b((n-1)q^C + q_i) - c)q_i - F_i$

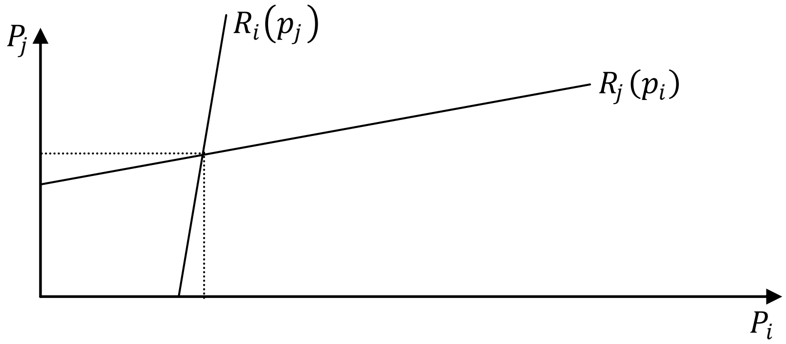
- $\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = A - b(n-1)q^C - 2bq_i - c = A - c - q^C(b(n-1) + 2b) = 0$ gitt $q_i = q^C$
  - Gir optimalt kvantum i Cournot-konkurranse: $q^c = \frac{A-c}{b(n+1)}$
  - Profitt: $\pi_i = \left(A - b\left((n-1)\frac{A-c}{b(n+1)} + \frac{A-c}{b(n+1)}\right) - c\right)\frac{A-c}{b(n+1)} - F_i = \left(\frac{A-c}{n+1}\right)^2 - F_i$

- Bertrand-modell med duopol - homogene produkter:
  - Etterspørselsfunksjonen for markedet: $Q(p_{i,j}) = A - b\,min[p_i, p_j]$
  - Etterspørselsfunksjonen for bedrift $i$: $q_i = \begin{cases} A - bp_i \; gitt \; p_i < p_j \\ \frac{A-bp_i}{2} \; gitt \; p_i = p_j \\ 0 \; gitt \; p_i > p_j \end{cases}$
  - Profittfunksjonen for bedrift $i$: $\pi_i = \begin{cases} (p_i - c_i)q_i - F_i \; gitt \; p_i < p_j \\ \frac{(p_i-c_i)q_i}{2} - F_i \; gitt \; p_i = p_j \\ -F_i \; gitt \; p_i > p_j \end{cases}$
    - Ser av uttrykket at $c_i = c_j$ og $F_{i,j} = 0$ gir nullprofitt for begge bedriftene.
    - Ser av uttrykket at Nash-likevekt gir profitt for bedriften med lavest grensekostnader, der prisen settes lik: $c_i < p_i \approx c_j = p_j$




- Bertrand-modell med duopol - differensierte produkter:
  - Totalt kvantum i markedet: $Q = q_i + q_j$
  - Etterspørselsfunksjonen for bedrift $i$: $q_i = A - bp_i + kp_j$ der $0 < k < b$
  - Profittfunksjon: $\pi_i = (p_i - c_i)q_i - F_i = (p_i - c_i)(A - bp_i + kp_j) - F_i$
  - Reaksjonsfunksjon ved profittmaksimering: $p_i = \frac{A+bc_i}{2b} + \frac{k}{2b}p_j \equiv R_i(p_j)$

- Finner profittmaksimerende pris ved å sette inn for $p_j$ og løse ut for $p_i$. Dette gir: $p_i{}^* = \frac{A}{2b-k} + b\frac{2bc_i+kc_j}{(2b+k)(2b-k)}$
  - Hvis $c_i = c_j = c$: $p_i{}^* = p_j{}^* = \frac{A+bc}{2b-k}$



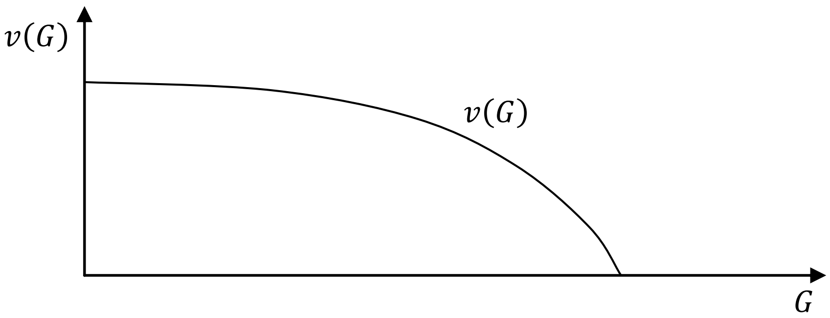

- Final-Offer Arbitration:
  - System: Arbeidsgiver- og arbeidstakersiden fremstiller lønnskravene $w_f$ og $w_u$, staten velger det kravet som ligger nærmest $x$.
  - Statens valg:
    - $x < \frac{w_f+w_u}{2} \quad \Rightarrow \quad w_f$
    - $x > \frac{w_f+w_u}{2} \quad \Rightarrow \quad w_u$
  - Anta at $x$ er ukjent for arbeidslivsorganisasjonene, men at denne verdien er normalfordelt med snitt $m$ og varians $\sigma^2$. I så fall er tetthetsfunksjonen gitt ved: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left\{-\frac{1}{2}(x-m)^2\right\}$

    $\Rightarrow \quad \frac{w_f+w_u}{2} = m$

    $\Rightarrow \quad w_f^* = m - \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}}$

    $\Rightarrow \quad w_u^* = m + \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}}$
  - Desto større spredning i statens foretrukkede $x$, desto større avstand vil det være i kravene til arbeidslivsorganisasjonene.
- Rasjonell atferd for individet kan gi et kollektivt irrasjonelt utfall:
  - Fellesskapets tragedie: Bønder og geiter
    - Bøndene holder geiter; bonde $i$ holder $g_i$ antall geiter.
    - Totalt antall geiter på jordet: $G = \sum_{i=1}^{n} g_i$

- Kostnad per geit: $c$
- Verdien per geit: $v(g_1 + \ldots + g_{i-1} + g_i + g_{i+1} + \ldots g_n) = v(g_i + g_{-i}) = v(G)$
  - For $G < G^{max}$: $v'(G) \leq 0$; $v''(G) \leq 0$.




- Profittfunksjon for bonde $i$: $\pi_i = g_i v(g_i + g_{-i}) - c g_i = g_i v(G) - c g_i$
- Når bøndene tilpasser seg i Nash-likevekt:
  - Nash-likevekt for bonde $i$: $g_i^*$
  - Førsteordensbetingelsen: $\frac{\partial \pi_i}{\partial g_i} = v(g_i + g_{-i}^*) + g_i v'(g_i + g_{-i}^*) - c =$ $v(G^*) + g_i v'(G^*) - c = v(G^*) + \frac{G^*}{n} v'(G^*) - c = 0$
  - Totalt antall geiter: $G^* = n \frac{c - v(G^*)}{v'(G^*)}$
- Samfunnsoptimal tilpasning:
  - Maksimering av $\Pi = Gv(G) - cG$
  - Førsteordensbetingelsen: $\frac{\partial \Pi}{\partial G} = v(G^{**}) + Gv'(G^{**}) - c = 0$
  - Totalt antall geiter: $G^{**} = \frac{c - v(G^{**})}{v'(G^{**})}$
- Ser her at $G^* > G^{**}$, altså at for mange geiter beiter i Nash-likevekt.

○ ”Prisoners dilemma”:
- To personer arresteres og blir stilt overfor følgende valg:
  - Angi kamerat (velge $1$):
    - Du får en mild straff hvis han ikke angir deg.
    - Du får en moderat straff hvis han også angir deg.
  - Ikke angi kamerat (velge $2$):
    - Du går fri hvis han ikke angir deg.
    - Du får en streng straff hvis han angir deg.

| | | **B** | |
|---|---|---|---|
| | | $B_1$ | $B_2$ |
| **A** | $A_1$ | $A_1(B_1), B_1(A_1)$ | $A_1(B_2), B_2(A_1)$ |
| | $A_2$ | $A_2(B_1), B_1(A_2)$ | $A_2(B_2), B_2(A_2)$ |

- Spiller $A$: $A_2(B_2) > A_1(B_2) > A_1(B_1) > A_2(B_1)$
- Spiller $B$: $B_2(A_2) > B_1(A_2) > B_1(A_1) > B_2(A_1)$
- Payoff-matrisen viser en Nash-likevekt der begge personene angir hverandre, på tross av at dette er dette ikke er den kollektivt beste løsningen.
- Hvordan forhindre fangens dilemma:
  - Gjentatte spill.
  - Legge inn mekanismer som endrer payoff:
    - Møt konkurransen-klausul: Poenget er å gjøre det mindre lønnsomt for rivalen å senke prisen.
    - Prisgaranti-klausul: Poenget er å gjøre det mer kostbart for en selv å senke prisen. Må innebære en form for møt konkurransen-klausul.
    - Redusere kundemobiliteten: Poenget er å gjøre det mer kostbart for kundene å bytte produsent.

## 1.3. Blandede strategier:

- Strategityper:
  - Ren strategi: Regel som sier hvordan spilleren velger.
  - Blandet strategi: Regel som sier hvilken sannsynlighet det er for at spilleren skal velge en ren strategi.

| | | **B** | |
|---|---|---|---|
| | | $B_1$ | $B_2$ |
| **A** | $A_1$ | $A_1(B_1), B_1(A_1)$ | $A_1(B_2), B_2(A_1)$ |
| | $A_2$ | $A_2(B_1), B_1(A_2)$ | $A_2(B_2), B_2(A_2)$ |

- Sannsynlighet for handling:
  - $A_1$: $p$
  - $A_2$: $1-p$
  - $B_1$: $q$
  - $B_2$: $1-q$
- Forventet pay-off for $A$:

  $E[\pi_A] = pqA_1(B_1) + p(1-q)A_1(B_2) + (1-p)qA_2(B_1) + (1-p)(1-q)A_2(B_2)$
- Effektiv randomisering for $B$ som gjør at $A$ er indifferent mellom egne valg:
  - $\frac{\partial E[\pi_A]}{\partial p} = qA_1(B_1) + (1-q)A_1(B_2) - qA_2(B_1) - (1-q)A_2(B_2) = 0$
    - $q^* = \frac{A_2(B_2)-A_1(B_2)}{A_1(B_1)-A_1(B_2)-A_2(B_1)+A_2(B_2)}$
    - $(1-q)^* = 1 - \frac{A_2(B_2)-A_1(B_2)}{A_1(B_1)-A_1(B_2)-A_2(B_1)+A_2(B_2)}$
- Spillsituasjoner der blandede strategier gir Nash-likevekt:
  - Generelt om Nash-likevekt med blandede strategier og to spillere: $(p^*, q^*)$ er en Nash-likevekt hvis hver spillers blandede strategi er beste respons på den andre spillerens blandede strategi, det vil si hvis $u_A(p^*, q^*) \geq u_A(p, q^*)$ og $u_B(p^*, q^*) \geq u_B(p^*, q)$.
  - Eksempel 1: "Matching Pennies"
    - Spiller $A$ ønsker å trekke ulikt fra spiller $B$. Spiller $B$ ønsker å trekke likt som spiller $A$.
    - Ingen likevekt i rene strategier, men likevekt med blandet strategi.

| | | **B** | |
|---|---|---|---|
| | | $B_1$ | $B_2$ |
| **A** | $A_1$ | $A_1(B_1), B_1(A_1)$ | $A_1(B_2), B_2(A_1)$ |
| | $A_2$ | $A_2(B_1), B_1(A_2)$ | $A_2(B_2), B_2(A_2)$ |

    - Spiller $A$: $A_1(B_2) = A_2(B_1) > A_1(B_1) = A_2(B_2)$
    - Spiller $B$: $B_1(A_1) = B_2(A_2) > B_1(A_2) = B_2(A_1)$
    - Eksempel der man oppnår Nash-likevekt:
      - Payoff:

| | | B | |
|---|---|---|---|
| | | Heads | Tails |
| A | Heads | $-1\,,1$ | $1\,,-1$ |
| | Tails | $1\,,-1$ | $-1\,,1$ |

- A trekker heads med $p$ og tails med $1-p$. B trekker heads med $q$ og tails med $1-q$.
- Forventet payoff for A:

  $$E[\pi_A] = pq(-1) + p(1-q)1 + (1-p)q1 + (1-p)(1-q)(-1)$$
  $$= 2p + 2q - 4pq - 1$$

- Effektiv randomisering for $B$ som gjør at $A$ er indifferent mellom egne valg:

  $$\frac{\partial E[\pi_A]}{\partial p} = 2 - 4q = 0$$
  $$\Rightarrow \quad q^* = \tfrac{1}{2}$$
  $$(1-q)^* = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- Hvis $q = \frac{1}{2}$:

  $$E[\pi_A] = 2p + 2q - 4pq - 1 = 2p + 2\frac{1}{2} - 4p\frac{1}{2} - 1 = 0$$

- Hvis $q > \frac{1}{2}$ $\quad\Rightarrow\quad$ A velger $p = 0$
- Hvis $q < \frac{1}{2}$ $\quad\Rightarrow\quad$ A velger $p = 1$

- Samme gjelder for A. Konklusjonen blir således at hvis A velger $p = \frac{1}{2}$ og B velger $q = \frac{1}{2}$, er begge fornøyde med eget valg når man observerer den andres valg.

- Eksempel 2: "Battle of the sexes"
  - Spiller $A$ ønsker $1$, men først og fremst å være sammen med spiller $B$. Spiller $B$ ønsker $2$, men først og fremst å være sammen med spiller $A$.
  - Ingen dominerende strategi for noen av spillerne, imidlertid to Nash-likevekter med rene strategier og én Nash-likevekt med blandede strategier.

| | | B | |
|---|---|---|---|
| | | $B_1$ | $B_2$ |
| A | $A_1$ | $A_1(B_1)\,,B_1(A_1)$ | $A_1(B_2)\,,B_2(A_1)$ |
| | $A_2$ | $A_2(B_1)\,,B_1(A_2)$ | $A_2(B_2)\,,B_2(A_2)$ |

- Spiller $A$: $A_1(B_1) > A_2(B_2) > A_1(B_2) > A_2(B_1)$
- Spiller $B$: $B_2(A_2) > B_1(A_1) > B_2(A_1) > B_1(A_2)$
- Eksempel der man oppnår Nash-likevekt:
  - Payoff:

| | | Ole | |
|---|---|---|---|
| | | Opera | Kino |
| Ida | Opera | $2\,,1$ | $0\,,0$ |
| | Kino | $0\,,0$ | $1\,,2$ |

  - Ida trekker opera med $p$ og kino med $1-p$. Ole trekker Opera med $q$ og kino med $1-q$.
  - Forventet payoff for Ida:

$$E[\pi_{Ida}] = pq2 + p(1-q)0 + (1-p)q0 + (1-p)(1-q)1$$
$$= 3pq - p - q + 1$$

  - Effektiv randomisering for Ole som gjør at Ida er indifferent mellom egne valg:

$$\frac{\partial E[\pi_{Ida}]}{\partial p} = 3q - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad q^* = \frac{1}{3}$$
$$(1-q)^* = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

  - Hvis $q = \frac{1}{3}$:

$$E[\pi_{Ida}] = 3pq - p - q + 1 = 3p\frac{1}{3} - p - \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

  - Hvis $q > \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad$ Ida velger $p = 0$
  - Hvis $q < \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad$ Ida velger $p = 1$

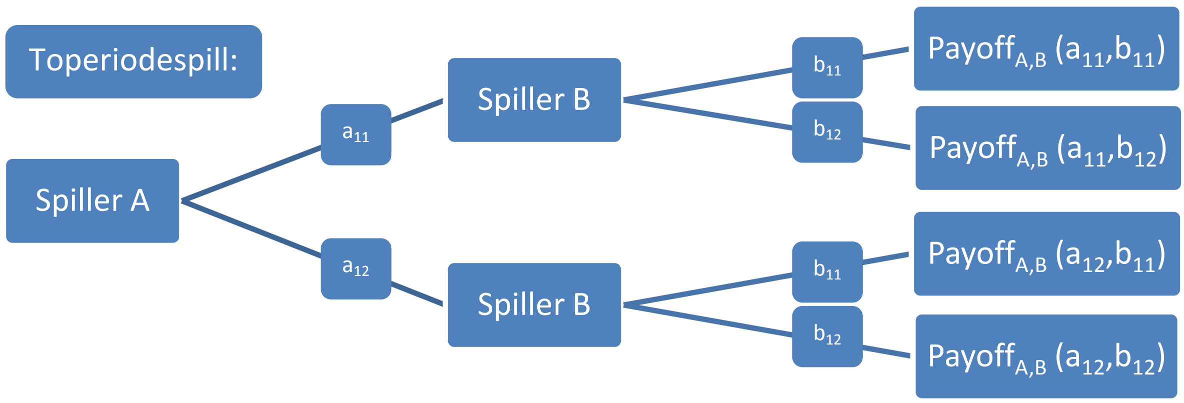
- Samme gjelder for Ida. Konklusjonen blir således at hvis Ida velger $p = \frac{2}{3}$ og Ole velger $q = \frac{1}{3}$, er begge fornøyde med eget valg når man observerer den andres valg. Da er også $E[\pi_{Ida}] = E[\pi_{Ole}] = \frac{2}{3}$.

○ Generelt: I et spill på normalform med $n$ spillere der spillet er gitt som $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$, og $n$ og $S_i$ er et endelig antall, eksisterer minst én (muligens med blandede strategier) Nash-likevekt.

# 2. Dynamiske spill med komplett informasjon

## 2.1. Dynamiske spill med komplett og perfekt informasjon

- Kjennetegn:
  - Alle handlinger skjer i sekvens.
  - Alle handlinger observeres før neste handling.
  - Spillernes payoff fra hver mulige kombinasjon av handlinger er allment kjent.
- Dynamiske spill løses ved hjelp av baklengs induksjon:
  - Spiller $A$ velger en handling $a_{1i} \in A_1$.
  - Spiller $B$ observerer $a_{1i}$ og velger en handling $b_{1i} \in B_1$ gitt $a_{1i}$.
  - Spiller $A$ observerer $b_{1i}$ og velger en handling $a_{2i} \in A_2$ gitt $a_{1i}$ og $b_{1i}$.
  - Osv.




- Stackelberg-modellen for duopol:
  - Markedsetterspørsel: $P = A - bQ = A - b(q_i + q_j)$
  - Baklengs induksjon - spiller $j$:
    - Profittfunksjon: $\pi_j = (A - b(q_i + q_j) - c_j)q_j - F_j$
    - Reaksjonsfunksjon: $q_j^* = \frac{A-c_j}{2b} - \frac{1}{2}q_i \equiv R_j(q_i)$
  - Baklengs induksjon - spiller $i$:
    - Profittfunksjon: $\pi_i = \left(A - b\left(q_i + R_j(q_i)\right) - c_i\right) q_i - F_i = \left(A - b\left(q_i + \left(\frac{A-c_j}{2b} - \frac{1}{2}q_i\right)\right) - c_i\right) q_i - F_i = \left(\frac{A-2c_i+c_j}{2} - bq_i\right) q_i - F_i$
  - Profittmaksimerende kvantum:

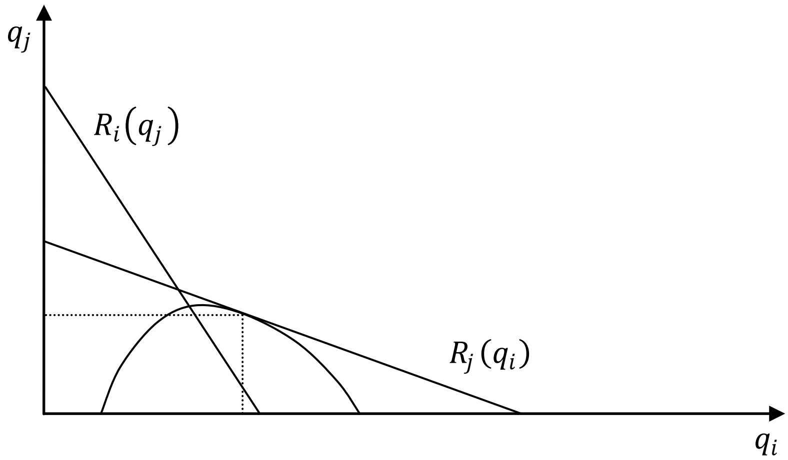
- Spiller $i$: $q_i^* = \frac{A-2c_i+c_j}{2b}$
- Spiller $j$: $q_j^* = \frac{A+2c_i-3c_j}{4b}$

○ Profitt:

- Spiller $i$: $\pi_i = \left(A - b\left(q_i^* + q_j^*\right) - c_i\right)q_i^* - F_i = \frac{\left(A-2c_i+c_j\right)^2}{8b} - F_i$
- Spiller $j$: $\pi_j = \left(A - b\left(q_i^* + q_j^*\right) - c_i\right)q_j^* - F_j = \frac{\left(A+2c_i-3c_j\right)^2}{16b} - F_j$

○ Likevektskvantum ved Stackelberg: $Q^S = \frac{A-2c_i+c_j}{2b} + \frac{A-3c_j+2c_i}{4b} = \frac{3A-2c_i-c_j}{4b}$

○ Likevektspris ved Stackelberg: $P^S = A - b\left(\frac{A-2c_i+c_j}{2b} + \frac{A-3c_j+2c_i}{4b}\right) = \frac{A+2c_i+c_j}{4}$




- Til sammenligning: Kvantumssamarbeid - monopolistisk opptreden:

○ Antar $c_i = c_j = c^M$

○ Kvantum i markedet: $Q^M = q_i + q_j = \frac{Q^M}{2} + \frac{Q^M}{2}$

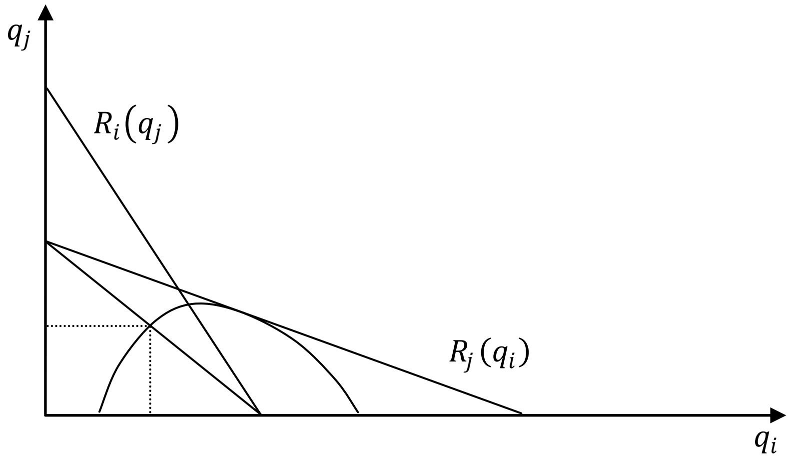
○ Markedsetterspørsel: $P^M = A - bQ^M = A - b\left(\frac{Q^M}{2} + \frac{Q^M}{2}\right)$

○ Profittfunksjon ved monopol: $\pi^M = (A - bQ^M - c^M)Q^M - F$

- Monopolkvantum: $Q^M = \frac{A-c^M}{2b}$
  - Bedrift $i$: $q_i = \frac{Q^M}{2} = \frac{\frac{A-c^M}{2b}}{2} = \frac{A-c^M}{4b}$
  - Bedrift $j$: $q_j = \frac{Q^M}{2} = \frac{\frac{A-c^M}{2b}}{2} = \frac{A-c^M}{4b}$
- Monopolprofitt: $\pi^M = \left(A - b\frac{A-c^M}{2b} - c^M\right)\frac{A-c^M}{2b} - F = \frac{\left(A-c^M\right)^2}{4b} - F$

- Bedrift $i$: $\pi_i = \frac{\frac{(A-c^M)^2}{4b}}{2} - F_i = \frac{(A-c^M)^2}{8b} - F_i$
- Bedrift $j$: $\pi_j = \frac{\frac{(A-c^M)^2}{4b}}{2} - F_j = \frac{(A-c^M)^2}{8b} - F_j$

○ Pris: $P^M = A - b\frac{A-c^M}{2b} = \frac{A+c^M}{2}$




- Sammenligning av Stackelberg, Cournot og monopol (antar $c_i = c_j = c^M = c$):
  - ○ Pris:
    - ▪ $P^S = \frac{A+3c}{4}$
    - ▪ $P^C = \frac{A+2c}{3}$
    - ▪ $P^M = \frac{A+c}{2}$
    - ▪ $P^S < P^C < P^M$
  - ○ Kvantum:
    - ▪ $Q^S = \frac{A-2c_i+c_j}{2b} + \frac{A+2c_i-3c_j}{4b} = \frac{3(A-c)}{4b}$
    - ▪ $Q^C = \frac{A-2c_i+c_j}{3b} + \frac{A-2c_j+c_i}{3b} = \frac{2(A-c)}{3b}$
    - ▪ $Q^M = \frac{A-c}{2b}$
    - ▪ $Q^S > Q^C > Q^M$
  - ○ Profitt:
    - ▪ Stackelberg:
      - Spiller $i$: $\pi_i^S = \frac{(A-2c_i+c_j)^2}{8b} - F_i = \frac{(A-c)^2}{8b} - F_i$
      - Spiller $j$: $\pi_j^S = \frac{(A+2c_i-3c_j)^2}{16b} - F_j = \frac{(A-c)^2}{16b} - F_j$

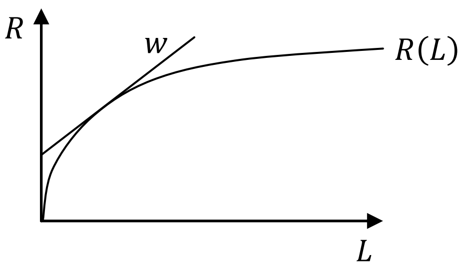
  - Cournot:
    - Spiller $i$: $\pi_i^C = \frac{(A-2c_i+c_j)(A-2c_j+c_i)}{9b} - F_i = \frac{(A-c)^2}{9b} - F_i$
    - Spiller $j$: $\pi_j^C = \frac{(A-2c_i+c_j)(A-2c_j+c_i)}{9b} - F_j = \frac{(A-c)^2}{9b} - F_j$
  - Monopol:
    - Spiller $i$: $\pi_i^M = \frac{(A-c)^2}{4b} - F_i$
  - Spiller $i$: $\pi_i^C < \pi_i^S < \pi_i^M$
  - Spiller $j$: $\pi_j^S < \pi_j^C < \pi_j^M$

- Lønn og sysselsetting i fagorganisert bedrift
  - Fagforening med monopol på arbeidskraft, bedrift med monopol på arbeidsplasser.
  - Fagforeningens nyttefunksjon: $U(w, L)$; $U_w' \geq 0$; $U_L' \geq 0$
  - Bedriftens profitt: $\pi(w, L) = R(L) - wL$; $R_L' \geq 0$; $R_{LL}'' \leq 0$
  - Spillet:
    - Fagforeningen setter $w$.
    - Bedriften observerer $w$ og fastsetter $L$.
    - Payoff er $U(w, L)$ og $\pi(w, L)$.
  - Løsning av spillet - baklengs induksjon:
    - Bedriftens maksimeringsproblem:

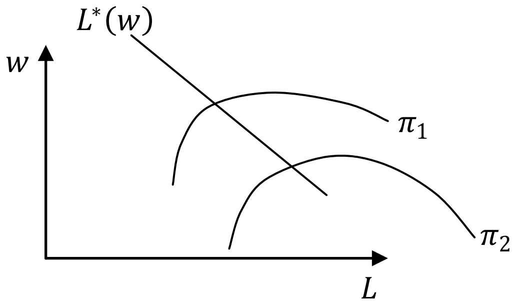
      $\max_{L \geq 0} \pi(w, L) = R(L) - wL$

      $\Rightarrow \quad \frac{\partial \pi}{\partial L} = R_L' - w = 0$

      $\Rightarrow \quad R_L' = w$




    - Sammenhengen mellom optimal sysselsetting og optimal lønn for bedriften:



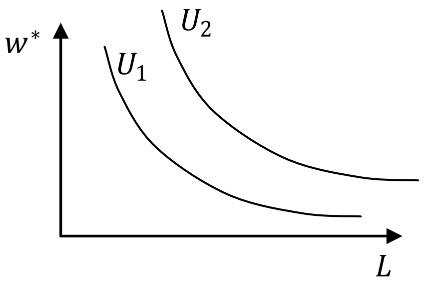

- Fagforeningens maksimeringsproblem:

  $\max_{w \geq 0} U(w, L) = U\big(w, L^*(w)\big)$

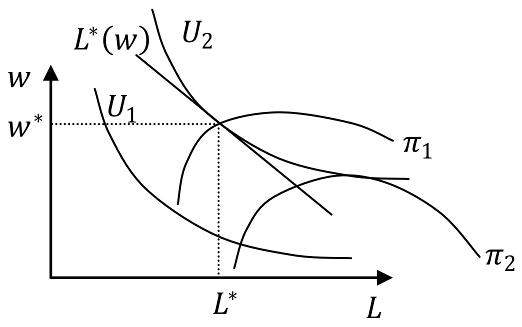
  $\Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial w} = 0$

  $\Rightarrow \quad \big(w^*, L^*(w^*)\big)$

- Sammenhengen mellom optimal sysselsetting og optimal lønn for fagforeningen:




- Tilpasningen:




- Konklusjon: Tilpasningen er ikke pareto-optimal; bedriften kunne fått økt profitt til $\pi_2$ uten at fagforeningen hadde tapt nytte fra $U_2$.

- Sekvensielle forhandlinger:

- Spillet: Spiller A og B forhandler over 1 krone som neddiskonteres med $\delta = \frac{1}{1+r}$ per runde.
  - Runde 1: A foreslår at de to skal få henholdsvis $s_1$ og $1 - s_1$ av kronen. B aksepterer eller avslår. Spillet ender hvis B aksepterer.
  - Runde 2: B foreslår at de to skal få henholdsvis $s_2$ og $1 - s_2$ av kronen. A aksepterer eller avslår. Spillet ender hvis A aksepterer.
  - Runde 3: A mottar $s$ og B mottar $1 - s$ av kronen. Eksterne bestemmer $s$.
- Løsning ved hjelp av baklengsinduksjon:
  - Runde 3: A mottar $s$ og B mottar $1 - s$ av kronen.
  - Runde 2: A vil kun akseptere $s_2$ hvis $s_2 \geq \delta s$. Hvis B foreslår $s_2 = \delta s$ vil A akseptere, og B får $1 - s_2 = 1 - \delta s$. B vil derfor tilby $s_2 = \delta s$ i periode 2 fordi $1 - \delta s > \delta(1 - s)$.
  - Runde 1: B vil kun akseptere $s_1$ hvis $1 - s_1 \geq \delta(1 - s_2)$, altså hvis $s_1 \leq 1 - \delta(1 - s_2)$. Hvis A foreslår $s_1 = 1 - \delta(1 - s_2)$ vil B akseptere, og A får $1 - \delta(1 - s_2)$. A vil derfor tilby $s_1 = 1 - \delta(1 - s_2)$ i periode 1 fordi $1 - \delta(1 - s_2) > \delta s_2$.
  - Payoff for A og B blir følgelig $(s_1, 1 - s_1)$; spillet ender i periode 1.

## 2.2. Dynamiske spill med komplett, men imperfekt informasjon

- Kjennetegn: Spill over flere perioder, men med simultane trekk i hver periode.
  - Spiller $A$ og $B$ trekker simultant $a_1 \in A_1$ og $b_1 \in B_1$.
  - Spiller $C$ og $D$ observerer $a_1$ og $b_1$, og trekker $c_1 \in C_1$ og $d_1 \in D_1$.
  - Payoff for spiller $i$: $u_i(a_1, b_1, c_1, d_1) = u_i\big(a_1, b_1, c_1^*(a_1, b_1), d_1^*(a_1, b_1)\big)$
  - Sub-spillperfekt Nash-likevekt: $\big(a_1^*, b_1^*, c_1^*(a_1^*, b_1^*), d_1^*(a_1^*, b_1^*)\big)$
- Eksempel 1: Bankkrise
  - To investorer plasserer innskudd i banken.
  - Notasjon:
    - Innskudd fra hver investor: $D$
    - Bruttoutbytte etter endt investering for hver investor: $R$
    - Utbetalt fordring for hver investor ved konkurs: $r$
  - Antar: $\frac{D}{2} < r < D < R \quad \Rightarrow \quad 2r - D < r$

- Investorene kan fordre innskuddene etter periode 1, 2 eller 3.
- Periode 1:

| | Fordre | Ikke fordre |
|---|---|---|
| Fordre | $r\,, r$ | $D\,, 2r - D$ |
| Ikke fordre | $2r - D\,, D$ | Neste periode |

- Periode 2:

| | Fordre | Ikke fordre |
|---|---|---|
| Fordre | $R\,, R$ | $2R - D\,, D$ |
| Ikke fordre | $D\,, 2R - D$ | $R\,, R$ |

- Baklengs induksjon:
  - I periode 2 vil fordre være strengt fordelaktig siden $2R - D > R$; begge fordrer i denne perioden.
  - Dette gir følgende matrise for periode 1:

| | Fordre | Ikke fordre |
|---|---|---|
| Fordre | $r\,, r$ | $D\,, 2r - D$ |
| Ikke fordre | $2r - D\,, D$ | $R\,, R$ |

  - To Nash-likevekter:
    - $r\,, r$
    - $R\,, R$
- Hvilken likevekt som velges avhenger av investorenes forventninger til hverandre. Spillet forteller ikke om det blir bankkrise, men det åpner for bankkrise.

## 2.3. Gjentatte spill

- To-trinns gjentatte spill:
  - Fangens dilemma:
    - Anta følgende payoff-matrise for spiller $1$ og $2$ som repeteres én gang:

| | $L_2$ | $R_2$ |
|---|---|---|
| $L_1$ | $1,1$ | $5,0$ |
| $R_1$ | $0,5$ | $4,4$ |

    - Ser her at Nash-likevekt gir ikke-samarbeid $(L_1, L_2)$ i runde 2. Payoff $(1,1)$ kan derfor settes inn i matrisen til runde $1$:

| | $L_2$ | $R_2$ |
|---|---|---|
| $L_1$ | $2,2$ | $6,1$ |
| $R_1$ | $1,6$ | $5,5$ |

    - Ser her at også runde $1$ gir ikke-samarbeid.
  - Generelt: I spill med et endelig antall repetisjoner der siste runde har én unik løsning, har også hvert delspill en unik løsning.
  - Generelt: I spill med et endelig antall repetisjoner med mer enn én Nash-likevekt, kan hvert enkelt delspill ha en unik løsning som ikke er Nash-likevekt.
    - Utvider fangens dilemma-eksemplet med én kolonne og én rad.

| | $L_2$ | $M_2$ | $R_2$ |
|---|---|---|---|
| $L_1$ | $1,1$ | $5,0$ | $0,0$ |
| $M_1$ | $0,5$ | $4,4$ | $0,0$ |
| $R_1$ | $0,0$ | $0,0$ | $3,3$ |

    - Anta at spillerne forventer $(R_1, R_2)$ i andre runde hvis $(M_1, M_2)$ er utfallet i første runde, og $(L_1, L_2)$ ellers. Dette gir følgende matrise for første runde:

| | $L_2$ | $M_2$ | $R_2$ |
|---|---|---|---|
| $L_1$ | 2 , 2 | 6 , 1 | 1 , 1 |
| $M_1$ | 1 , 6 | 7 , 7 | 1 , 1 |
| $R_1$ | 1 , 1 | 1 , 1 | 4 , 4 |

- Her har vi tre subspill-perfekte likevekter for hele spillet; $((L_1, L_2),(L_1, L_2))$, $((M_1, M_2),(R_1, R_2))$ og $((R_1, R_2),(L_1, L_2))$

- Spill med uendelig antall runder:
  - Generelt: Selv om hvert enkelt delspill bare har én Nash-likevekt, kan man oppnå et subspill-perfekt utfall der ingen delspill ender i Nash-likevekten.
  - Gjenopptar fangens dilemma, men nå med uendelig antall runder:

| | $L_2$ | $R_2$ |
|---|---|---|
| $L_1$ | 1 , 1 | 5 , 0 |
| $R_1$ | 0 , 5 | 4 , 4 |

  - Innfører en diskonteringsrate $\delta = \frac{1}{1+r} < 1$
    - Gitt pengemengde i dag er mindre verdt enn tilsvarende pengemengde i fremtiden.
    - Sannsynligheten for at spillet vil fortsette i neste runde er alltid mindre enn 1.
  - Anta at spillerne følger en grim-trigger-strategi: Spiller $i$ velger samarbeid $(R_i)$ i første delspill, og deretter samarbeid så lenge motspilleren velger det samme. I det øyeblikket en av spillerne velger ikke-samarbeid $(L_i)$, vil den andre velge ikke-samarbeid i all fremtid.
  - Payoff:
    - Ikke-samarbeid: $V_{NC} = 5 + 1\delta + 1\delta^2 + \ldots = 5 + \frac{\delta}{1-\delta}$
    - Samarbeid: $V_C = 4 + 4\delta + 4\delta^2 + \ldots = 4 + 4\frac{\delta}{1-\delta}$
  - Samarbeid er lønnsomt hvis:

$$4+4\frac{\delta}{1-\delta} \geq 5+\frac{\delta}{1-\delta}$$

$\Rightarrow \quad 4\frac{\delta}{1-\delta} \geq 1+\frac{\delta}{1-\delta}$

$\Rightarrow \quad 4\delta \geq 1-\delta+\delta$

$\Rightarrow \quad \delta \geq \frac{1}{4}$

- Folk-teoremet: Så lenge diskonteringsraten er tilstrekkelig høy vil alltid samarbeid gi likevekt i et uendelig spill.

- Delspillperfekt Nash-likevekt: Nash-likevekt i hvert enkelt delspill.
- Friedmans teorem:
  - La $G$ være et endelig, statisk spill med komplett informasjon og $n$ antall spillere. Hvis $\delta$ er tilstrekkelig nærme $1$ gir grim-trigger-strategien Nash-likevekt, og denne likevekten er delspillperfekt.
  - Bevis:
    - Grim-trigger-strategi for spiller $i$:
      - Spiller samarbeid $a_{x_i}$ i runde $1$.
      - I hver påfølgende runde $t$ spilles $a_{x_i}$ så lenge utfallet av alle foregående runder er $a_{x_i}$; ellers spilles ikke-samarbeid $a_{d_i}$.
      - Antar at alle andre spillere har en grim-trigger-strategi.
    - Payoff:
      - La $\pi_{x_i}$ være payoff i runde $t$ for spiller $i$ når alle spillerne velger samarbeid.
      - La $\pi_{d_i}$ være payoff i runde $t$ for spiller $i$ når denne velger ikke-samarbeid, mens de andre velger samarbeid.
      - La $\pi_{e_i}$ være payoff i hver enkelt runde $t$ for spiller $i$ når noen har brutt samarbeidet i minst én av alle de $t-1$ periodene.
    - Diskonteringsfaktoren: Nåverdien $V_i$ av all kommende payoff for spiller $i$ i periode $t$ når utfallet i alle foregående runder er $(a_{x_1}, \dots, a_{x_n})$:
      - Samarbeid: $V_i = \frac{\pi_{x_i}}{1-\delta}$
        - Payoff i runde $t$ er $x_i$, deretter står spilleren overfor tilsvarende situasjon neste runde: $V_i = \pi_{x_i} + \delta V_i \quad \Rightarrow \quad V_i = \frac{\pi_{x_i}}{1-\delta}$
      - Ikke-samarbeid: $V_i = \pi_{d_i} + \pi_{e_i}\frac{\delta}{1-\delta}$

- Samarbeid er kun lønnsomt hvis:

$$\frac{\pi_{x_i}}{1-\delta} \geq \pi_{d_i} + \pi_{e_i}\frac{\delta}{1-\delta}$$

$\Rightarrow \quad \pi_{x_i} \geq \pi_{d_i}(1-\delta) + \pi_{e_i}\delta = \pi_{d_i} - \delta(\pi_{d_i} - \pi_{e_i})$

$\Rightarrow \quad \delta(\pi_{d_i} - \pi_{e_i}) \geq \pi_{d_i} - \pi_{x_i}$

$\Rightarrow \quad \delta \geq \frac{\pi_{d_i} - \pi_{x_i}}{\pi_{d_i} - \pi_{e_i}}$

- Grim-trigger-strategi er Nash-likevekt for alle spillerne hvis:

$$\delta \geq \max_i \frac{\pi_{d_i} - \pi_{x_i}}{\pi_{d_i} - \pi_{e_i}}$$

- Eksempel: Samarbeid mellom oligopolister:
  - Generelt krav til samarbeid i duopol (jamfør Friedman): $\frac{\pi_{x_i}}{1-\delta} \geq \pi_{d_i} + \pi_{e_i}\frac{\delta}{1-\delta}$
  - Her:
    - Ved samarbeid i kartell gis halvparten av monopolprofitten:

$$\pi_{x_i} = \frac{1}{2}\frac{(A-c)^2}{4b} = \frac{(A-c)^2}{8b}$$

    - Ved brudd på samarbeidet gis en engangs økning i profitten:

$$\max_{q_i} \pi_{d_i} = \left(A - b\left(\frac{Q^M}{2} + q_i\right) - c\right)q_i = \left(A - b\left(\frac{A-c}{4b} + q_i\right) - c\right)q_i$$

$\Rightarrow \quad q_i = \frac{3(A-c)}{8b}$

$\Rightarrow \quad \pi_{d_i} = \left(A - b\left(\frac{A-c}{4b} + \frac{3(A-c)}{8b}\right) - c\right)\frac{3(A-c)}{8b} = \frac{3(A-c)}{8}\frac{3(A-c)}{8b} = \frac{9(A-c)^2}{64b}$

    - Etter brudd på samarbeidet er all fremtidig profitt Cournot-profitt:

$$\pi_{e_i} = \frac{(A-c)^2}{9b}$$

  - Samarbeid krever altså:

$$\frac{\frac{(A-c)^2}{8b}}{1-\delta} \geq \frac{9(A-c)^2}{64b} + \frac{\frac{(A-c)^2}{9b}\delta}{1-\delta}$$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{(1-\delta)8} \geq \frac{9}{64} + \frac{\delta}{(1-\delta)9}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{8} \geq \frac{9(1-\delta)}{64} + \frac{\delta}{9}$

$\Rightarrow \quad \frac{64}{8} \geq 9(1-\delta) + \frac{64\delta}{9}$

$\Rightarrow \quad \left(9 - \frac{64}{9}\right)\delta \geq 9 - \frac{64}{8}$

$$\Rightarrow \quad \delta \geq \frac{9-\frac{64}{8}}{9-\frac{64}{9}}$$

$$\Rightarrow \quad \delta \geq \frac{9}{17}$$

- Avsluttende:
  - De som ønsker samarbeid mest er de som har lengst tidshorisont.
  - Forhold som taler for vellykket prissamarbeid (stor $\delta$):
    - Tålmodige bedrifter
    - Kort periodelengde
    - Hard konkurranse hvis samarbeidet brytes
    - Begrenset antall produsenter
    - Høye etableringskostnader

# 3. Informasjonsteori – en grunnmodell

## 3.1. Innledning:

- Prosessen:
  - Prinsipalen lager en kontrakt.
  - Agenten aksepterer kontrakten hvis dette gir minst like stor forventet avkastning som alternativavkastningen.
  - Agenten gjør en innsats på vegne av prinsipalen, og prinsipalen betaler lønn for innsatsen.
- Målkonflikter mellom prinsipal og agent:

| | Prinsipal | Agent |
|---|---|---|
| Lønn | – | + |
| Innsats | + | – |

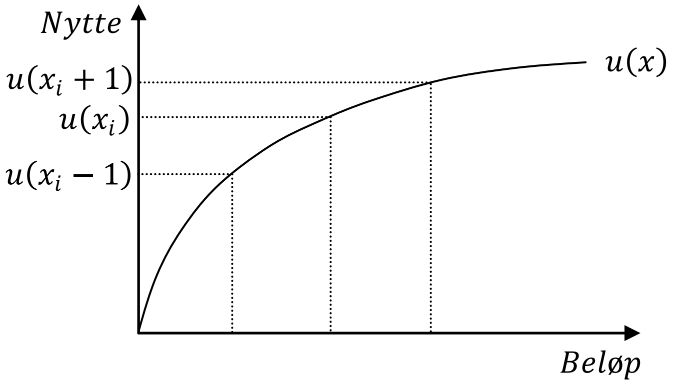
- Benchmark:
  - Symmetrisk informasjon:
    - Prinsipalen og agenten har den samme informasjonen, men denne informasjonen er ikke nødvendigvis perfekt.
  - Agentens innsats og resultatet er observerbart.
  - Det er dermed mulig å inkludere disse variablene i kontrakten eksplisitt.


  - Løsning av spillet:
    - Delspillperfekt likevekt: Hver spiller velger optimal strategi til enhver tid gitt allerede kjente utfall, og hver spiller forventer samtidig at alle andre spillere også oppfører seg på samme måte.

- Baklengs induksjon:
  - Gitt at agenten aksepterer kontrakten vil han velge den innsatsen som maksimerer den forventede nytten.
  - Basert på forventinger til innsatsen gitt av kontrakten avgjør agenten å enten akseptere eller ikke akseptere kontrakten. Agenten vil kun akseptere hvis dette gir større forventet avkastning enn alternativavkastningen.
  - Gitt agentens forventede adferd for hver mulige kontrakt, vil prinsipalen tilby den kontrakten som maksimerer prinsipalnytten.

## 3.2. Grunnmodellen

- En bilateral kontrakt:
  - Prinsipalen $P$ designer en kontrakt og krever et pengeverdimessig resultat $x$.
  - Agenten $A$ bidrar med innsats $e$ og får betalt lønnen $w$.
  - Resultatet avhenger både av innsatsen og naturlige tilfeldigheter.
  - Sannsynligheten for å få et bestemt resultat $x_i \in X$ gitt innsatsen $e$:
    $Prob(x = x_i|e) = p_i(e),\ i \in \{1,2,\dots,n\}$ der $\sum_i^n p_i(e) = 1$
- Risikoaversjon:
  - Tenker oss to mulige utfall $x_i - 1$ og $x_i + 1$ med lik sannsynlighet for begge utfallene, det vil si $p = (1-p) = \frac{1}{2}$.
  - Risikoavers aktør:
    - Nytten av forventet resultat er større enn forventet nytte:
      $u\left(\frac{1}{2}(x_i - 1) + \frac{1}{2}(x_i + 1)\right) > \frac{1}{2}u(x_i - 1) + \frac{1}{2}u(x_i + 1)$
      $\Rightarrow \quad u(x_i) > \frac{1}{2}u(x_i - 1) + \frac{1}{2}u(x_i + 1)$
      $\Rightarrow \quad 2u(x_i) > u(x_i - 1) + u(x_i + 1)$
      $\Rightarrow \quad u(x_i) + u(x_i) > u(x_i - 1) + u(x_i + 1)$
      $\Rightarrow \quad u(x_i) - u(x_i - 1) > u(x_i + 1) - u(x_i)$
    - Forståelse: Et gitt tapsbeløp betyr mer enn tilsvarende beløp i gevinst, det er altså avtagende grensenytte av gevinsten:




- Risikonøytral aktør:
  - Nytten av forventet resultat er lik forventet nytte:

    $$u\left(\tfrac{1}{2}(x_i - 1) + \tfrac{1}{2}(x_i + 1)\right) = \tfrac{1}{2}u(x_i - 1) + \tfrac{1}{2}u(x_i + 1)$$

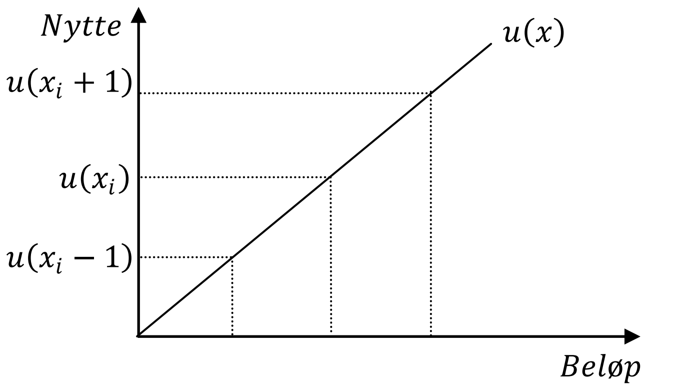
    $$\Rightarrow \quad u(x_i) = \tfrac{1}{2}u(x_i - 1) + \tfrac{1}{2}u(x_i + 1)$$

    $$\Rightarrow \quad 2u(x_i) = u(x_i - 1) + u(x_i + 1)$$

    $$\Rightarrow \quad u(x_i) + u(x_i) = u(x_i - 1) + u(x_i + 1)$$

    $$\Rightarrow \quad u(x_i) - u(x_i - 1) = u(x_i + 1) - u(x_i)$$

  - Forståelse: Et gitt tapsbeløp betyr like mye som tilsvarende beløp i gevinst, det er altså konstant grensenytte av gevinsten:




- Nytten til aktørene:
  - Prinsipalen: $B(x - w)$
    - Risikoavers: $B' > 0$; $B'' < 0$
    - Risikonøytral: $B' > 0$; $B'' = 0$
  - Agenten: $U(w, e) = u(w) - v(e)$
    - Risikoavers: $U' > 0$; $U'' < 0$
    - Risikonøytral: $U' > 0$; $U'' = 0$

- Marginalbetydningen av lønn og innsats:
  - Lønn: $u'(w) > 0$; $u''(w) \leq 0$
  - Innsats: $v'(e) > 0$; $v''(e) \geq 0$

- Prinsipalens optimeringsproblem:

  $max_{w(x_i),e} \sum_{i=1}^{n} p_i(e)\, B\big(x_i - w(x_i)\big)$ under bibetingelsen $\sum_{i=1}^{n} p_i(e)u\big(w(x_i)\big) - v(e) \geq \underline{U}$

  $$\Rightarrow \quad \mathcal{L}(w^*(x_i), e^*, \lambda^*) = \sum_{i=1}^{n} p_i(e)\, B\big(x_i - w(x_i)\big) + \lambda\big(\sum_{i=1}^{n} p_i(e)u\big(w(x_i)\big) - v(e) - \underline{U}\big)$$

  $$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w(x_i)}(w^*(x_i), e^*, \lambda^*) = -p_i(e^*)B'\big(x_i - w^*(x_i)\big) + \lambda^* p_i(e^*)u'\big(w^*(x_i)\big) = 0$$

  $$\Rightarrow \quad \lambda^* = \frac{B'\big(x_i - w^*(x_i)\big)}{u'\big(w^*(x_i)\big)} = konstant$$

- Kuhn-Tucker:
  - La $f$ og $g^i$ være konkave funksjoner av $w$. Da er $w^*$ løsningen på $max_w\, f$ under betingelsen $g^i \geq 0$ hvis, og bare hvis, det finnes en vektor $\lambda^*$ slik at følgende Kuhn-Tucker-krav oppfylles:

    a. $\mathcal{L}(w^*, \lambda^*) \geq \mathcal{L}(w, \lambda^*)$ for alle $x \in D$

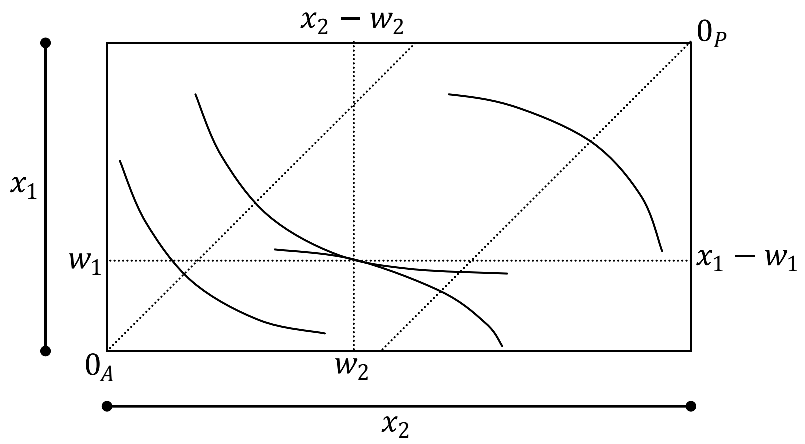
    b. $\lambda^{i*} \geq 0$ for alle $i = 1, \dots, m$

    c. $g^i(w^*) = 0$ for alle $i = 1, \dots, m, \lambda^*$

    d. $g^i(w^*) \geq 0$ for alle $i = 1, \dots, m$

## 3.3. Optimale betalingsmekanismer

- Generelt der informasjonen er symmetrisk:
  - Forutsetter at brudd på kontrakten aldri er lønnsomt.
  - Pareto-effektivitet:
    - $\lambda^* = \frac{B'\left(x_i - w^*(x_i)\right)}{u'\left(w^*(x_i)\right)} = \frac{B'\left(x_j - w^*(x_j)\right)}{u'\left(w^*(x_j)\right)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{B'\left(x_i - w^*(x_i)\right)}{B'\left(x_j - w^*(x_j)\right)} = \frac{u'\left(w^*(x_i)\right)}{u'\left(w^*(x_j)\right)}$
    - $\sum_{i=1}^{n} p_i(e)u\big(w(x_i)\big) - v(e) \geq \underline{U}$
  - Edgeworth bytteboks når det er to mulige resultater $x_1$ og $x_2$ der $x_1 < x_2$. Tilsvarende lønninger er $w_1$ og $w_2$:



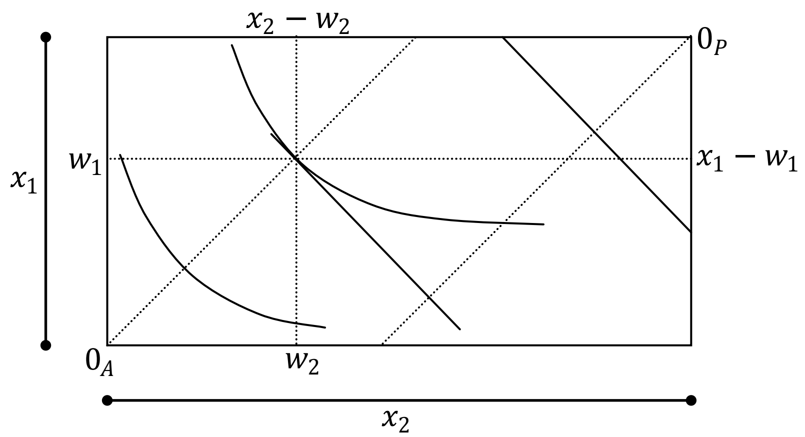

- Hvis prinsipalen er risikonøytral og agenten er risikoavers utledes kontrakten som følger:
  - $B' > 0; B'' = 0 \quad \Rightarrow \quad B' = konstant$
  - $u'(w) > 0; u''(w) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad w^*(x_i) = w^*(x_j) = w^*$
    - Forståelse: Av $\lambda^* = \frac{B'(x_i - w^*(x_i))}{u'(w^*(x_i))} = konstant$ ser vi at konstant krever konstant $u'(w^*(x_i))$ for alle $i$. Dette betyr at $u'(w^*(x_1)) = u'(w^*(x_2))$, altså at $w^*(x_1) = w^*(x_2) = w^*$.
  - Her er betalingen til agenten kun avhengig av agentens reservasjonsnytte og agentens innsats:

    $u(w^*) - v(e^*) = \underline{U}$

    $\Rightarrow \quad u(w^*) = \underline{U} + v(e^*)$

    $\Rightarrow \quad w^* = u^{-1}\left(\underline{U} + v(e^*)\right)$

    (teoremet om en invers funksjon: $y = f(x) \Rightarrow \quad x = f^{-1}(y)$)
  - Det optimale for en risikonøytral prinsipal er altså å ta all risiko.
  - Edgeworth bytteboks i toresultattilfellet:



- Nyttenivået som det er optimalt for prinsipalen å kreve:
  - Gitt optimal lønn $w^* = u^{-1}\left(\underline{U} + v(e^*)\right)$ og symmetrisk informasjon kan vi utlede prinsipalens maksimeringsproblem:

$$\max_e \pi(e) = \sum_{i=1}^{n} p_i(e)\, x_i - w^* = \sum_{i=1}^{n} p_i(e)\, x_i - u^{-1}\left(\underline{U} + v(e^*)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \pi(e)}{\partial e} = \sum_{i=1}^{n} p_i{}'(e^*)\, x_i - (u^{-1})'\left(\underline{U} + v(e^*)\right) v'(e^*) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} p_i{}'(e^*)\, x_i = (u^{-1})'\left(\underline{U} + v(e^*)\right) v'(e^*)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} p_i{}'(e^*)\, x_i = w'(e^*)$$

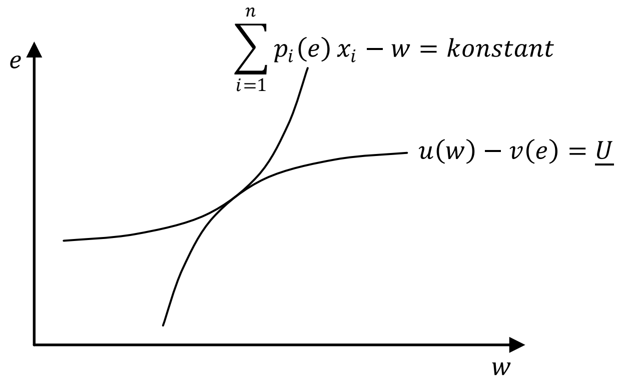
$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} p_i{}'(e^*)\, x_i = \frac{v'(e^*)}{u'(w(e^*))}$$

fordi den deriverte av en invers er lik den inverse av den deriverte:

Generelt: $x = f^{-1}(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial x}}$

Her: $w^* = u^{-1}\left(\underline{U} + v(e^*)\right) \quad \Rightarrow \quad w'(e^*) = \frac{1}{\frac{u'(w(e^*))}{v'(e^*)}} = \frac{v'(e^*)}{u'(w(e^*))}$

- Grafisk fremstilling:




- Hvis prinsipalen er risikoavers og agenten er risikonøytral:
  - $u'(w) > 0;\ u''(w) = 0 \quad \Rightarrow \quad u' = konstant$
  - $B' > 0;\ B'' \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x_i - w^*(x_i) = x_j - w^*(x_j) = k$
    - Forståelse: Av $\lambda^* = \frac{B'(x_i - w^*(x_i))}{u'(w^*(x_i))} = konstant$ ser vi at konstant $u'$ krever konstant $B'(x_i - w^*(x_i))$ for alle $i$. Dette betyr at $B'(x_1 - w^*(x_1)) = B'(x_2 - w^*(x_2))$, altså at $x_1 - w^*(x_1) = x_2 - w^*(x_2) = k$. Generelt: $w^*(x_i) = x_i - k$.

- Det optimale for en risikoavers prinsipal er altså en franchise-kontrakt der det kreves et visst beløp $k$ fra agenten, og lar denne ta all øvrig avkastning.
- Den risikonøytrale agenten vil kun delta hvis:
  - $\sum_{i=1}^{n} p_i(e)\big(w(x_i)\big) - v(e) \geq \underline{U}$

    $\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} p_i(e^*)(x_i - k) - v(e^*) \geq \underline{U}$

    $\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} p_i(e^*)(x_i - k) \geq \underline{U} + v(e^*)$

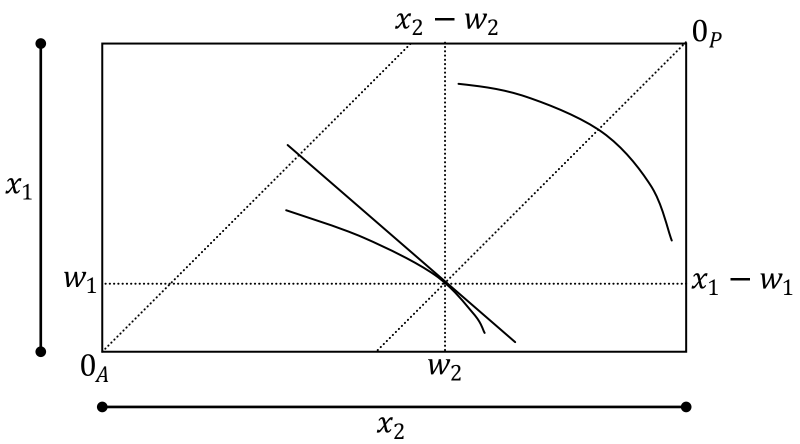
    $\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} p_i(e^*)x_i - k = \underline{U} - v(e^*)$

    $\Rightarrow \quad k = \sum_{i=1}^{n} p_i(e^*)x_i - \underline{U} - v(e^*)$
  - Forståelse: Prinsipalen velger $k$ som er differansen mellom forventet profitt og minimumskravet fra agenten for å akseptere kontrakten.
- Nyttenivået som det er optimalt for prinsipalen å kreve:
  - Gitt optimal lønn $w^*(x_i) = x_i - k$ og symmetrisk informasjon kan vi utlede prinsipalens maksimeringsproblem:

    $max_e\ k \quad \Rightarrow \quad max_e \sum_{i=1}^{n} p_i(e)\, x_i - v(e)$

    $\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} p_i{}'(e^*)\, x_i - v'(e^*) = 0$

    $\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} p_i{}'(e^*)\, x_i = v'(e^*)$
  - Forventet marginal økning i avkastningen er lik marginalkostnaden ved innsatsen.




- Hvis både prinsipalen og agenten er risikoaverse:
  - $B'' < 0$ og $u'' < 0$
  - $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w(x_i)} = -B'\big(x_i - w^*(x_i)\big) + \lambda^* u'\big(w^*(x_i)\big) = 0$
  - Differensierer med hensyn på $x_i$:

    $-B''\left(1 - \frac{dw^*(x_i)}{dx_i}\right) + \lambda^* u'' \frac{dw^*(x_i)}{dx_i} = 0$ der $\lambda^* = \frac{B'(x_i - w^*(x_i))}{u'(w^*(x_i))}$

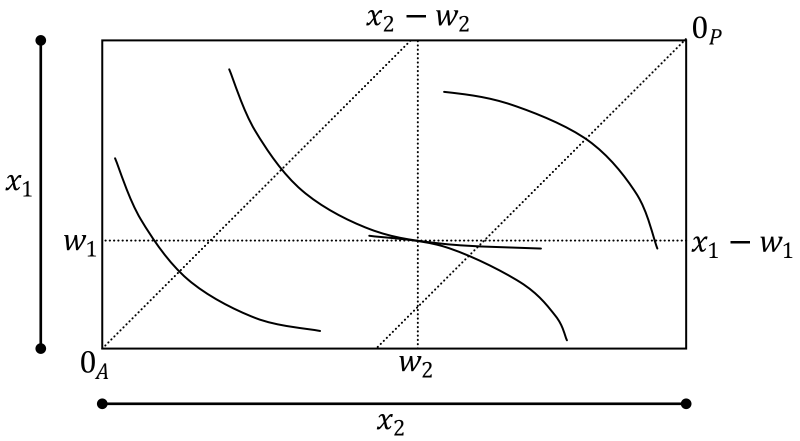
$$\Rightarrow \quad -B''\left(1-\frac{dw^*(x_i)}{dx_i}\right)+\frac{B'}{u'}u''\,\frac{dw^*(x_i)}{dx_i}=0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{B''}{B'}\left(1-\frac{dw^*(x_i)}{dx_i}\right)+\frac{u''}{u'}\frac{dw^*(x_i)}{dx_i}=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{u''}{u'}+\frac{B''}{B'}\right)\frac{dw^*(x_i)}{dx_i}=\frac{B''}{B'}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dw^*(x_i)}{dx_i}=\frac{\frac{B''}{B'}}{\frac{u''}{u'}+\frac{B''}{B'}}\equiv\frac{r_P}{r_P+r_A}$$

- Desto større risikoaversjon hos prinsipalen i forhold til agenten, desto mer burde lønnen styres av resultatet:

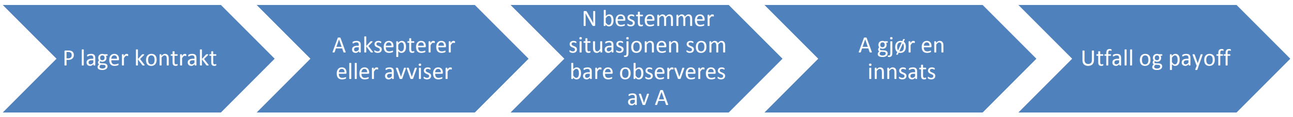


# 4. Moral Hazard

## 4.1. Innledning:

- Moral Hazard (moralsk risiko):
    - Type 1: Agentens handlinger er ikke fullt ut verifiserbare.
        - Eksempel: Lathet under fast lønn.


    - Type 2: Agenten mottar privat informasjon etter at kontrakten er signert.




- Utgangspunkt i moral hasard: Siden prinsipalen ikke kan observere agentens innsats kan ikke innsatsen inkluderes i kontrakten eksplisitt.
    - Hvis prinsipalen tilbyr en kontrakt med fast lønn vil alltid agenten velge det laveste innsatsnivået: $u(\underline{w}) - v(e^{min}) \geq u(\underline{w}) - v(e)$
    - Dette vet prinsipalen, som derfor alltid vil tilby den laveste lønnen som tilfredsstiller deltagerbetingelsen for det laveste innsatsnivået når lønnen er fast: $w^{min} = u^{-1}\left(\underline{U} + v(e^{min})\right)$
- Problemet i moral hasard oppstår i siste fase av spillet: Når kontrakten først er signert, og siden innsats ikke observeres av prinsipalen, vil agenten velge det innsatsnivået som maksimerer egen nytte. Derfor må agenten legge inn et insentiv for agenten til å velge ønsket innsatsnivå. Insentivbetingelsen for alle innsatsnivåer som ikke prefereres av prinsipalen:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^*(e^*)u\big(w(x_i)\big) - v(e^*) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i(e)u\big(w(x_i)\big) - v(e)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} p_i^*(e^*)u\big(w(x_i)\big) - \sum_{i=1}^{n} p_i(e)u\big(w(x_i)\big) \geq v(e^*) - v(e)$$

## 4.2. Modellen:

- Maksimeringsproblemet til prinsipalen:

  Løs problemet: $max_{w(x_i)} \sum_{i=1}^{n} p_i^*\left(x_i - w(x_i)\right)$

  under følgende betingelser

  1. Deltagerbetingelsen: $\sum_{i=1}^{n} p_i^* u\left(w(x_i)\right) - v(e^*) \geq \underline{U}$
  2. Insentivbetingelser: $\sum_{i=1}^{n} p_i^* u\left(w(x_i)\right) - v(e^*) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i u\left(w(x_i)\right) - v(e)$

  - Løsning:

    $\mathcal{L}(w(x_i), \lambda, \mu)$

    $$= \sum_{i=1}^{n} p_i^*\left(x_i - w(x_i)\right) + \lambda\left[\sum_{i=1}^{n} p_i^* u\left(w(x_i)\right) - v(e^*) - \underline{U}\right]$$

    $$+ \sum_{j}^{m} \mu_j \left[\sum_{i=1}^{n} p_i^* u\left(w(x_i)\right) - v(e^*) - \sum_{i=1}^{n} p_i(e_j) u\left(w(x_i)\right) + v(e_j)\right]$$

    $$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w(x_i)} = -p_i^* + \lambda p_i^* u'\left(w(x_i)\right) + \mu(p_i^* - p_i)u'\left(w(x_i)\right) = 0 \qquad (1)$$

    $$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} p_i^* u\left(w(x_i)\right) - v(e^*) - \underline{U} = 0 \qquad (2)$$

    $$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_j} = \sum_{i=1}^{n} p_i^* u\left(w(x_i)\right) - v(e^*) - \sum_{i=1}^{n} p_i(e_j) u\left(w(x_i)\right) + v(e_j) = 0 \qquad (3)$$

  - Forståelse av likningene:
    - Av (1):
      - $\frac{p_i^*}{u'\left(w(x_i)\right)} = \lambda p_i^* + \mu(p_i^* - p_i)$
      - $\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{p_i^*}{u'\left(w(x_i)\right)}\right] = \sum_{i=1}^{n}[\lambda p_i^* + \mu(p_i^* - p_i)] = \lambda \qquad \Rightarrow \qquad \lambda > 0$
      - $\frac{p_i^*}{u'(w(x_i))} = \lambda p_i^* + \mu\left(1 - \frac{p_i}{p_i^*}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \mu \neq 0$
      - Jamfør Kuhn-Tucker b.; $\mu \geq 0$: $\qquad \Rightarrow \qquad \mu > 0$
    - Av (1), (2) og (3):
      - $n + 1 + m$ antall likninger for å bestemme alle $w_i$, $\lambda$ og alle $\mu_j$.
    - I to-resultattilfellet: (2) og (3) kan brukes til å finne $w_i^*(e^*)$.

- Sammenligning av moral hazard og symmetrisk informasjon: I moral hazard må en risikonøytral prinsipal belaste den risikoaverse agenten med noe risiko, og slik sett miste noe profitt, for å gi agenten insentiv om å yte optimal innsats.
- Moral hazard type 2: Agenten mottar privat informasjon etter at kontrakten er signert.

- Problem: Ingen kjenner sannsynligheten for et gitt resultat før kontrakten er signert, kun agenten kjenner denne sannsynligheten etter at kontrakten er signert. Hvis sannsynligheten viser seg å gjøre forventet nytte for agenten lavere enn reservasjonsnytten har agenten insentiv til å bryte kontrakten.
- Ex ante deltagelsesbetingelse: Innebærer at agenten ikke kan bryte kontrakten når den først er signert.
- Ex post deltagelsesbetingelse: Innebærer at agenten aldri får forventet nytte lavere enn reservasjonsnytten. Hvis det viser seg at sannsynligheten for å lykkes er høy, vil agentens forventede nytte være større enn reservasjonsnytten. Hvis det viser seg at sannsynligheten for å lykkes er lav, vil agentens forventede nytte være lik reservasjonsnytten.

# 5. Adverse Selection

## 5.1. Innledning:

- Adverse Selection (baklengs seleksjon):
  - Agenten holder på privat informasjon før kontrakten signeres.
    - Eksempel: Kvaliteten på kommunale tjenester tilbudt fra private aktører.


- Prinsipalen kan løse problemet ved å etablere spesifikke kontrakter for hver agenttype, der den enkelte kontrakt er slik at hver agenttype vil velge den kontrakten som er ment for ham. Innebærer at agenten med verst innsats vil oppnå nytte lik reservasjonsnytten, mens de andre agentene får noe positiv avkastning.
- Antar to agenttyper: $A^G$ og $A^B$.
  - $U^G(w,e) = u(w) - v(e)$
  - $U^B(w,e) = u(w) - kv(e)$ der $k > 1$

## 5.2. Ved fravær av adverse selection:

- Hvis symmetrisk informasjon:
  - Hvis $A^G$ ansettes må prinsipalen løse følgende problem:
    $max_{e,w}\, u_P(e) - w$ under deltagerbetingelsen $u(w) - v(e) \geq \underline{U}$.
    - Løsning:
      $\mathcal{L}(e,w,\lambda) = u_P(e) - w + \lambda\left[u(w) - v(e) - \underline{U}\right]$

      $$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = -1 + \lambda u'(w) = 0 \qquad (1)$$

      $$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e} = u_P{}'(e) - \lambda v'(e) = 0 \qquad (2)$$

      $$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = u(w) - v(e) - \underline{U} = 0 \qquad (3)$$
    - Av (1): $\lambda = \frac{1}{u'(w)}$

- Av (2): $\lambda = \frac{u_P'(e)}{v'(e)}$
- Av (1) og (2): $u_P'(e) = \frac{v'(e)}{u'(w)}$
- Av (3): $u(w) - v(e) = \underline{U} \quad \Leftrightarrow \quad w^* = u^{-1}\left(\underline{U} + v(e)\right)$

○ Hvis $A^B$ ansettes må prinsipalen løse følgende problem:
$max_{e,w}\, u_P(e) - w$ under deltagerbetingelsen $u(w) - kv(e) \geq \underline{U}$.

- Løsning:
$\mathcal{L}(e, w, \lambda) = u_P(e) - w + \lambda\left[u(w) - kv(e) - \underline{U}\right]$

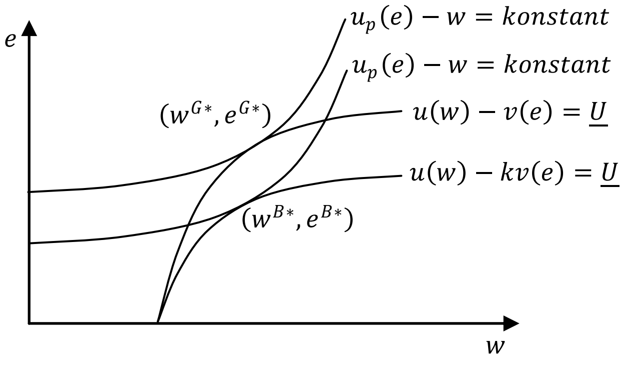
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = -1 + \lambda u'(w) = 0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e} = u_P'(e) - \lambda k v'(e) = 0 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = u(w) - kv(e) - \underline{U} = 0 \qquad (3)$$

- Av (1): $\lambda = \frac{1}{u'(w)}$
- Av (2): $\lambda = \frac{u_P'(e)}{kv'(e)}$
- Av (1) og (2): $u_P'(e) = \frac{kv'(e)}{u'(w)}$
- Av (3): $u(w) - kv(e) = \underline{U} \quad \Leftrightarrow \quad w^* = u^{-1}\left(\underline{U} + kv(e)\right)$

○ Grafisk fremstilling:




- Ved adverse selection er ikke kontrakten beskrevet over optimal for prinsipalen. Da vil nemlig $A^B$ velge kontrakten ment for ham, mens $A^G$ vil velge kontrakten ment for $A^B$ fordi $U^G(w^{B*}, e^{B*}) = u(w^{B*}) - v(w^{B*}) > u(w^{B*}) - kv(w^{B*}) = \underline{U}$.
- Prinsipalen kan løse problemet ved å anta at $A = A^G$ har sannsynligheten $p$ og at $A = A^B$ har sannsynligheten $1 - p$. Med utgangspunkt i disse sannsynlighetene kan

prinsipalen etablere en selvselekterende meny av kontrakter $\{(w^{G*}, e^{G*}), (w^{B*}, e^{B*})\}$ der hver agenttype velger den kontrakten som er ment for seg.

## 5.3. Modellen:

- Maksimeringsproblemet til prinsipalen:

Løs problemet: $max_{\{(w^G,e^G),(w^B,e^B)\}} p[u_P(e^G) - w^G] + (1-p)[u_P(e^B) - w^B]$

under følgende betingelser

1. Deltagerbetingelsen for $A^G$:

   $u(w^G) - v(e^G) \geq \underline{U}$

2. Deltagerbetingelsen for $A^B$:

   $u(w^B) - kv(e^B) \geq \underline{U}$

3. Insentivbetingelsen for $A^G$:

   $u(w^G) - v(e^G) \geq u(w^B) - v(e^B)$

4. Insentivbetingelsen for $A^G$:

   $u(w^B) - kv(e^B) \geq u(w^G) - kv(e^G)$

- Begrensning av restriksjoner:
  - Betingelse 1. kan fjernes; hvis $A^B$ er villig til å inngå en gitt kontrakt må også $A^G$ være villig til dette. Av 3., 2. og 1.:

    $u(w^G) - v(e^G) \geq u(w^B) - v(e^B) \geq u(w^B) - kv(e^B) \geq \underline{U}$
  - Betingelse 4. kan fjernes; større innsats kreves av $A^G$ enn av $A^B$. Av 3. og 4.:

    $u(w^G) - v(e^G) \geq u(w^B) - v(e^B)$

    $\Rightarrow \quad u(w^G) - u(w^B) \geq v(e^G) - v(e^B)$

    $u(w^B) - kv(e^B) \geq u(w^G) - kv(e^G)$

    $\Rightarrow \quad k[v(e^B) - v(e^B)] \geq u(w^G) - u(w^B)$

    $\Rightarrow \quad k[v(e^B) - v(e^B)] \geq u(w^G) - u(w^B) \geq v(e^G) - v(e^B)$

    $\Rightarrow \quad v(e^G) \geq v(e^B)$ siden $k > 1$
- Løsning:

$$\mathcal{L}(w^G, e^G, w^B, e^B)$$
$$= p[u_P(e^G) - w^G] + (1-p)[u_P(e^B) - w^B]$$
$$+ \lambda[u(w^B) - kv(e^B) - \underline{U}] + \mu[u(w^G) - v(e^G) - u(w^B) + v(e^B)]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w^G} = -p + \mu u'(w^G) = 0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w^B} = -(1-p) + \lambda u'(w^B) - \mu u'(w^B) = 0 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e^G} = pu_P'(e^G) - \mu v'(e^G) = 0 \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e^B} = (1-p)u_P'(e^B) - \lambda k v'(e^B) + \mu v'(e^B) = 0 \qquad (4)$$

- Forståelse av likningene:
  - Av (1): $\mu = \frac{p}{u'(w^G)}$
  - Av (2): $\lambda - \mu = \frac{1-p}{u'(w^B)}$
  - Av (3): $\mu = \frac{pu_P'(e^G)}{v'(e^G)}$
  - Av (4): $\lambda k - \mu = \frac{(1-p)u_P'(e^B)}{v'(e^B)}$
- Av (3) og (4) finner vi $e^G$ og $e^B$.
- Når disse er funnet kan vi finne $w^G$ og $w^B$ ved å sette inn i betingelsene 2. og 3. for $e^G$ og $e^B$. Merk at disse betingelsene holder ved likhet.

## 5.4. Når prinsipaler konkurrerer om agenter:

- Spillet:
  - Antar at prinsipaler konkurrerer om agenter.
  - Antar to typer agenter $A^G$ og $A^B$ og to mulige utfall av arbeidet; suksess $x_S$ og fiasko $x_F$. Begge agentene yter samme innsats, men den gode agenten har større sjanse for suksess. Derav er sannsynligheten for at en agent skal klare å oppnå $x_S$ henholdsvis $p^G$ og $p^B$, der $p^G > p^B$. Utfallene er observerbare, og prinsipalen belønner dem med henholdsvis $w_S$ og $w_F$.
  - Payoff:
    - Forventet avkastning for en risikonøytral prinsipal:
      $E(\pi) = p(x_S - w_S) + (1-p)(x_F - w_F)$
    - Forventet nytte for en risikoavers agent:
      - En god agent: $E(U^G) = p^G u(w_S) + (1-p^G)u(w_F)$
      - En dårlig agent: $E(U^B) = p^B u(w_S) + (1-p^B)u(w_F)$
  - Kontrakten vil bestå av $\{(w_S^G, w_F^G), (w_S^B, w_F^B)\}$.

- Benchmark: Symmetrisk informasjon:
  - Agentens maksimeringsproblem for en gitt agenttype $T \in (G, B)$:

    $$\max_{w_S^T, w_F^T} E(\pi) = p^T(x_S - w_S^T) + (1 - p^T)(x_F - w_F^T)$$

    under betingelsen om at

    $$E(U^T) = p^T u(w_S^T) + (1 - p^T)u(w_F^T) \geq \underline{U^T}$$
  - Løsning:

    $$\mathcal{L} = p^T(x_S - w_S^T) + (1 - p^T)(x_F - w_F^T) + \lambda\left[p^T u(w_S^T) + (1 - p^T)u(w_F^T) - \underline{U^T}\right]$$

    $$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_S^T} = -p^T + \lambda p^T u'(w_S^T) = 0 \qquad (1)$$

    $$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_F^T} = -(1 - p^T) + \lambda(1 - p^T)u'(w_F^T) = 0 \qquad (2)$$

    $$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = p^T u(w_S^T) + (1 - p^T)u(w_F^T) - \underline{U^T} = 0 \qquad (3)$$
  - Av (1) og (2):

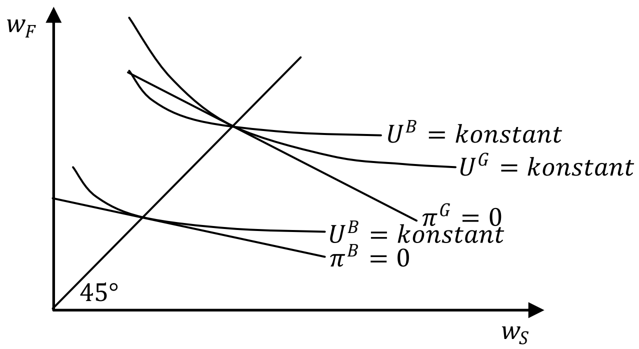
    $$\lambda = \frac{1}{u'(w_S^T)} = \frac{1}{u'(w_F^T)}$$

    $$\Rightarrow \quad w_S^T = w_F^T$$
  - Frikonkurranse mellom prinsipalene innebærer null forventet profitt:

    $$w_S^T = w_F^T = p^T x_S + (1 - p^T)x_F$$

    $$\Rightarrow \quad w_S^G = w_F^G = p^G x_S + (1 - p^G)x_F$$

    $$\Rightarrow \quad w_S^B = w_F^B = p^B x_S + (1 - p^B)x_F$$
  - Grafisk fremstilling:



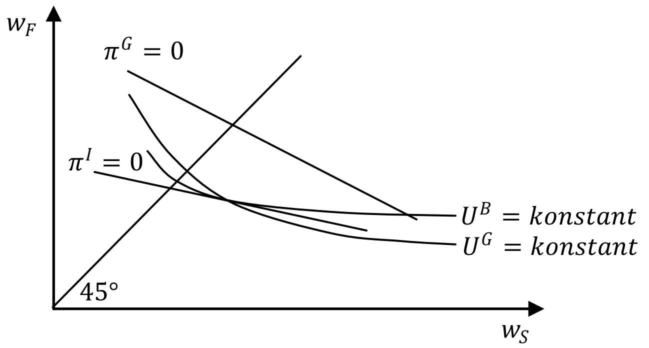

  - Ser her at hvis informasjonen er asymmetrisk, vil $A^B$ fremstille seg selv som $A^G$. Da blir prinsipalens forventede profitt negativ.
- Prinsipalen må opprette et sett med kontrakter $\{C^G, C^B\}$ under følgende betingelser:
  - Ingen kontrakt kan eksistere som foretrekkes foran $C^G$ av $A^G$, og ikke foran $C^B$ av $A^B$, som gir positiv profitt for prinsipalen, gitt at bare $A^G$ vil velge den.

- Ingen kontrakt kan eksistere som foretrekkes foran $C^B$ av $A^B$, og ikke foran $C^G$ av $A^G$, som gir positiv profitt for prinsipalen, gitt at bare $A^B$ vil velge den.
- Ingen kontrakt kan eksistere som foretrekkes foran $C^G$ av $A^G$, og foran $C^B$ av $A^B$, som gir positiv profitt for prinsipalen, gitt at begge agenttypene vil velge den.

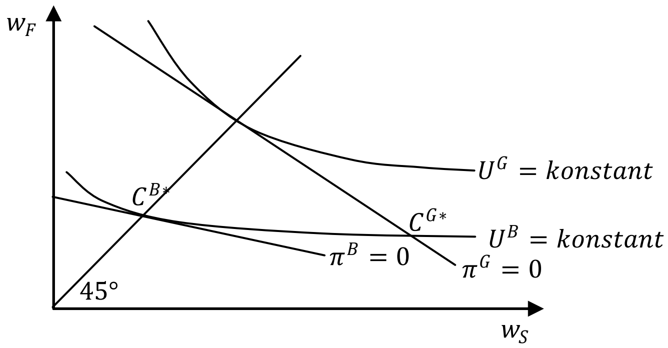
- Hvis $C^G = C^B$ har vi en samlende (pooling) likevekt, hvis $C^G \neq C^G$ har vi en separerende (separating) likevekt.
- Bevis på at samlende likevekt ikke finnes i dette spillet:
  - Hvis en samlende likevekt finnes og prinsipalen har nullprofitt må denne kontrakten oppfylle følgende:

    $E(\pi) = p^I(x_S - w_S) + (1 - p^I)(x_F - w_F) = 0$

    der $p^I = qp^G + (1 - q)p^B$ er sannsynligheten for $x_S$.
  - Grafisk fremstilling:




    - Ser at en kontrakt i området under $U^B = konstant$ over $U^G = konstant$ gir mer for $x_S$ og mindre for $x_F$.
    - Ser også at dette kontrakter i dette området er foretrukket for $A^G$, men ikke for $A^B$.
    - Siden kun $A^G$ vil akseptere $C^I$, og dette gir positiv profitt for prinsipalen, kan ikke dette være en likevekt.
- Grafisk fremstilling av en optimal kontrakt:

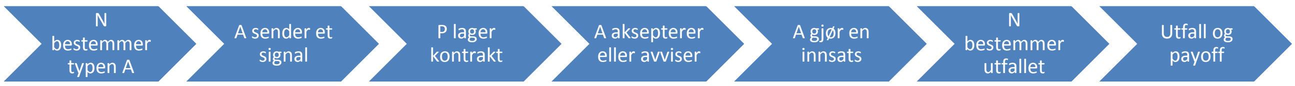


- Forståelse av at $C^{G*}$ må ligge i skjæringspunktet mellom $C^{B*}$ og $\pi^G = 0$:
  - $C^{G*}$ må ligge på linjen $\pi^G = 0$ for å være en likevekt.
  - $C^{G*}$ må ligge under eller på $C^{B*}$ for at ikke $A^B$ skal ønske den fremfor $C^{B*}$.
  - Enhver kontrakt under $C^{G*}$ er rent dominert av $C^{G*}$ for $A^G$.
- Samlet sett må altså $C^{G*} \equiv (w_S^G, w_F^G)$ oppfylle følgende:
  - $u(w^{B*}) = p^B u(w_S^G) + (1 - p^B) u(w_S^G)$
  - $p^G(x_S - w_S) + (1 - p^G)(x_F - w_F) = 0$

# 6. Signalling

## 6.1. Innledning:

- Signaling (signalisering):
  - Asymmetrisk informasjon er ikke alltid ønskelig for den informerte. De som forsøker å sende signaler gjør dette for å gi motparten mer informasjon.
  - Signalisering fra agenten:




    - Gode agenter kan han sende et signal om sin egen type. Hvis signalet skal være informativt for prinsipaler, må kostnadene tilknyttet signalet være for store for dårlige agenter, men samtidig tilstrekkelig små for gode agenter.
    - Et eksempel er utdanning som signal.
  - Signalisering fra prinsipalen:


    - Av og til har agenten mindre informasjon enn prinsipalen om situasjonen knyttet til forholdet deres. Dette påvirker agentens vilje til å akseptere kontrakten. Spesielt vil gode prinsipaler få mindre avkastning når dårlige prinsipaler forsøker å fremstå som gode.
    - Dette kan gode prinsipaler løse ved å tilby kontrakter som dårlige prinsipaler aldri ville vært tjent med.

## 6.2. Signalisering fra agenten:

- Eksempel: Utdanning som et signal:

  - Antar to typer arbeidere $G$ og $B$ med produktivitet $e^G = 2$ og $e^B = 1$. Bedriften som skal ansette gis følgende profitt:
    - $\pi^G = 2 - w$ gitt $G$
    - $\pi^B = 1 - w$ gitt $B$
  - Antar full konkurranse mellom bedrifter, slik at bedriften ville tilbudt $w = 2$ til $G$ og $w = 1$ til $B$ ved symmetrisk informasjon.
  - Før de entrer arbeidsmarkedet har arbeidstakerne mulighet til å ta utdanning. Vi antar at denne utdanningen ikke har noen innvirkning på arbeidernes produktivitet, den fungerer kun som et signal.
  - Agentenes kostnad ved å ta $y$ enheter utdanning:
    - $c^G = \frac{1}{2}y$ for $G$
    - $c^B = y$ for $B$
  - Bedriften antar at arbeideren er $G$ hvis $y \geq y^*$, og $B$ hvis $y < y^*$. Dermed vil arbeidstakere velge enten $y = 0$ eller $y = y^*$.
  - Krav for at $y^*$ skal være et effektivt signal om arbeidstakerens type:
    - Insentivbetingelsen for $G$: $G$ må velge $y = y^*$:

      $$2 - \frac{1}{2}y^* \geq 1 - 0$$

      $$\Rightarrow \quad y^* \leq 2$$
    - Insentivbetingelsen for $B$: $B$ må velge $y = 0$:

      $$1 - 0 \geq 2 - y^*$$

      $$\Rightarrow \quad y^* \geq 1$$
    - Samlet gir dette følgende krav for $y^*$: $1 \leq y^* \leq 2$
  - Siden all utdanning koster vil det altså være mest lønnsomt med $y^* = 1$.
- Tar opp igjen eksemplet fra adverse selection med $A^G$ og $A^B$, der resultatene kan bli enten $x_S$ eller $x_F$:
  - Under symmetrisk informasjon får agentene:
    - $U^{G*} = u(w^{G*}) = u(p^G\pi_S + (1 - p^G)\pi_F)$
    - $U^{B*} = u(w^{B*}) = u(p^B\pi_S + (1 - p^B)\pi_F)$
  - Under asymmetrisk informasjon får agentene:
    - $E(U^G) = p^G u(w_S^G) + (1 - p^G)u(w_F^G) < U^{G*}$
    - $U^B = U^{B*}$
  - Innfører muligheten for å signalisere ”god” gjennom utdanning:

    - Kostnaden ved utdanning for de to typene agenter er henholdsvis $v^G$ og $v^B$.
    - Prinsipalen antar at det å ta utdanning innebærer at agenten er $A^G$, mens ingen utdanning innebærer $A^B$.
  - Krav for at utdanning skal fungere som et effektivt signal for $A^G$:
    - $v^G \leq U^{G*} - U^{B*}$
    - $v^B \geq U^{G*} - U^{B*}$