NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10007

Dato/*Date:* 14.12.16 Side/*Page:* 1

Emnekode/*Subject* SØK 2103 Antall ark/*Number of pages:* 10

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

Oppg. 1

To partier: 1, 2 3 velgere: A, B, C

To problemstillinger: X, Y

π_{1i} = ssh for at velger i stemmer på parti 1

$$\pi_{1i} = \frac{(U_{1i} - U_{2i})}{K} + 0{,}5 \qquad K = \text{konstant}$$

U_{1i} = nytten til velger i hvis parti 1 vinner

U_{2i} = nytten til velger i hvis parti 2 vinner

Nyttefunksjoner:

velger A: $U_A = -x^2 - (5-y)^2$

velger B: $U_B = -(1-x)^2 - (4-y)^2$

velger C: $U_C = -(5-x)^2 - y^2$

a) Velgernes idealpunkter:

velger A: $\frac{\delta U_A}{\delta X} = -2x = 0 \longrightarrow \underline{X^A = 0}$

$\frac{\delta U_A}{\delta Y} = -2(5-Y) \times (-1) = 0 \rightarrow 10 - 2Y = 0 \longrightarrow \underline{Y^A = 5}$

velger B: $\frac{\delta U_B}{\delta X} = -2(1-x) \times (-1) = 0 \rightarrow 2 - 2x = 0 \longrightarrow \underline{X^B = 1}$

$\frac{\delta U_B}{\delta Y} = -2(4-Y) \times (-1) = 0 \rightarrow 8 - 2y = 0 \longrightarrow \underline{Y^B = 4}$

Velger C: $\frac{\delta U_C}{\delta X} = -2(5-x) \times (-1) = 0 \rightarrow 10 - 2x = 0 \longrightarrow \underline{X^C = 5}$

$\frac{\delta U_C}{\delta Y} = -2y = 0 \longrightarrow \underline{Y^C = 0}$

Her har vi maksimert hvert individ sin nytte mhp. X og Y og funnet velgernes idealpunkter

Den gule kopien beholder du/*Please keep the yellow page*

Oppg. 1

b) Ved kommunevalg, vil partiene gå til valg på standpunkter hvor de tror de vil få flest stemmer.

Vi kan først se på parti 1:

Deres forventet antall stemmer vil være:

$$EV_1 = \pi_{1A} + \pi_{1B} + \pi_{1C} = \frac{(U_A + U_B + U_C)}{K} + 0{,}5$$

For å finne optimal standpunkt så må vi maksimerere $\pi_{1A} + \pi_{1B} + \pi_{1C}$ mhp. X og Y.

$$\pi_{1A} + \pi_{1B} + \pi_{1C} = \frac{(-x^2 - (5-y)^2 - (1-x)^2 - (4-y)^2 - (5-x)^2 - y^2)}{K} + 0{,}5$$

$$\frac{\partial(\pi_{1A} + \pi_{1B} + \pi_{1C})}{\partial x} = \frac{-2x - 2(1-x) \times (-1) - 2(5-x) \times (-1)}{K} = 0$$

$$= -2x + 2 - 2x + 10 - 2x = 0$$

$$\rightarrow \quad 6x = 12$$

$$\underline{x = 2}$$

$$\frac{\partial(\pi_{1A} + \pi_{1B} + \pi_{1C})}{\partial y} = \frac{-2(5-y) \times (-1) - 2(4-y) \times (-1) - 2y}{K}$$

$$= 10 - 2y + 8 - 2y - 2y = 0$$

$$\rightarrow \quad 6y = 18$$

$$\underline{y = 3}$$

Her ser vi at partiet maksimerer den utilitaristiske velferdsfunksjonen, dvs. summen av nyttene til individene, og dermed er det partiet som har disse standpunktene som vil vinne valget. Partienes standpunkter kan plasseres i en linje i forhold til hverandre og velgerne vil stemme på det partiet som er nærmest sitt →

Kandidat nr./Candidate no. 10007

Dato/Date: 14.12.16 Side/Page: 3

Emnekode/Subject SØK 2103 Antall ark/Number of pages: 10

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Oppg. 1

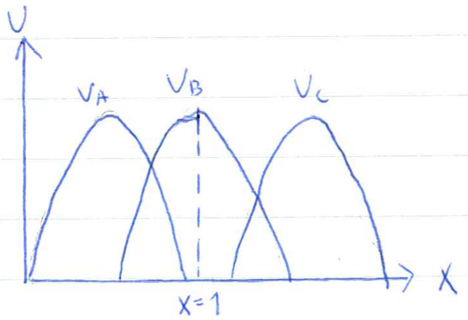
b) → idealpunkt, og dermed vil partier som ikke plasserer seg med disse standpunktene tape mot partier som gjør det. Det vil føre til at begge partiene vil gå til valg på $X = 2$ og $Y = 3$.

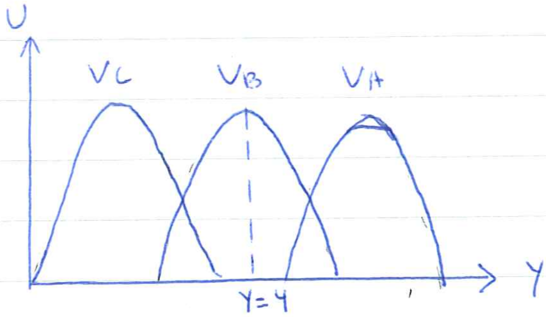
c) Her er forutsetningene til medianvelgerteoremet oppfylt, og medianvelgeren vil få sitt standpunkt gjennom ~~fort~~ ved folkeavstemning.

$x^A = 0 < \underline{x^B = 1} < x^C = 5$

$y^C = 0 < \underline{y^B = 4} < y^A = 5$

I begge problemstillingene vil B være medianvelgeren. De vil ha like mange velgere til venstre for seg som til høyre for seg, og vil dermed vinne alle parvise voteringer.





Vi ser her at for alle $X < 1$ så vil det bli nedstemt av B og C, og for alle $X > 1$ så vil det bli nedstemt av A og B Det er lignede scenario for Y, hvor alle $Y < 4$ vil bli nedstemt av B og A, mens alle $Y > 4$ vil bli nedstemt av C og B.

Fagtrykk Trondheim AS 05.2014

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10007

Dato/*Date:* 14.12.16 Side/*Page:* 4

Emnekode/*Subject* SØK 2103 Antall ark/*Number of pages:* 10

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Oppg. 1

c) For å se om majoriteten ønsker å avgjøre problemstillingene med folkeavstemning eller kommunevalg, er vi nødt til å se de ulike nyttene som velgerne får i de to tilfellene.

Velgere	Kommunevalg (K) $X=2$ $Y=3$	Folkeavstemning (F) $X=1$ $Y=4$	Foretrekker
Velger A	$-(2)^2-(5-3)^2=-8$	$-(1)^2-(5-4)^2=-2$	$K<F$
Velger B	$-(1-2)^2-(4-3)^2=-2$	$-(1-1)^2-(4-4)^2=0$	$K<F$
Velger C	$-(5-2)^2-3^2=-18$	$-(5-1)^2-4^2=-32$	$K>F$
Totalt:			$K<F$

Her ser vi at både velger A og B vil få høyere nytte ved folkeavstemning framfor kommunevalg, mens C får høyere nytte (mindre nyttetap) ved kommunevalg framfor folkeavstemning. Siden flertallet (både A og B) ønsker folkeavstemning, så vil dette bli gjennomført. Resultatet vil da bli $X=1$ og $Y=4$. Majoriteten vil støtte forslaget. Velger A vil komme ut med nytten -2, velger B med 0 og velger C med -32. Vi se dermed at velger C vil ha et høyt nyttetap av dette resultatet.

NTNU

Kandidat nr./Candidate no. 10007

Dato/Date: 14.12.16 Side/Page: 5

Emnekode/Subject SØK 2103 Antall ark/Number of pages: 10

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

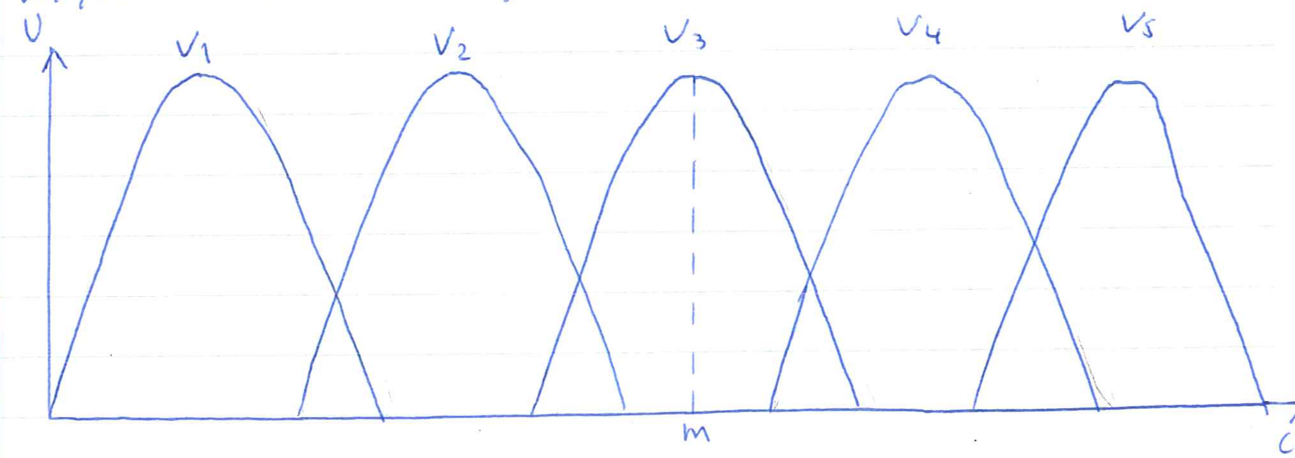
This column is for external examiner

Oppg. 2 : Medianvelger-teoremet

Medianvelger-teoremet går ut på at den velgeren som står sentralt, vil alltid vinne parvise voteringer. Forutsetninger for dette:

- Vi kan plassere velgerne i en linje naturlig i forhold til hverandre
- Alle velgere har et favorittalternativ, og vil velge de standpunktene som er nærmest deres favorittalternativ.
- Det er odde antall velgere.

Hvis disse forutsetningene er oppfylt, så vil favorittstandpunktet til medianvelgeren alltid vinne parvise voteringer. Medianvelgeren står sentralt når man plasserer alle velgerne på en linje med deres standpunkter naturlig i forhold til hverandre, og de vil dermed ha like mange velgere til venstre side for seg som til høyre side for seg.



Vi ser her at medianvelgeren er velger 3, og deres favorittstandpunkt er m, Dermed vil G_m vinne alle parvise voteringer. Alle $G < G_m$ vil bli nedstemt av velgerne 3, 4 og 5, mens alle $G > G_m$ vil bli nedstemt av velgerne 1, 2 og 3.

Kandidat nr./Candidate no. 10007

Dato/Date: 14.12.16 Side/Page: 6

Emnekode/Subject SØK 2103 Antall ark/Number of pages: 10

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

Oppg. 3

Pareto-optimalt omfang er når ingen av individene kan få det bedre uten at noen andre får det verre. Hvis individene avgjør individuelt hvor mye de skal konsumere av det kollektive godet og det private godet, vil de ende opp med å konsumere for mye av det private godet og for lite av det kollektive godet sammenlignet med en pareto-optimal tilpasning. Dette er siden de vil konsumere det kollektive godet helt til de selv er indifferent mellom det kollektive godet og det private godet. Hvis individene samarbeider om konsumet av det kollektive godet, vil de konsumere det kollektive godet helt til samfunnet er indifferent mellom det kollektive godet og det private godet. Vi kan se på en modell med to konsumenter og to goder for å se hvordan dette fungerer:

To konsumenter: A, B

To goder: X_i, G

X_i = ~~[illegible]~~ konsumet av et privat gode, $i = A, B$

G = konsumet av et kollektivt gode

G_i = andelen av det kollektive gode som er overveidd individ i, $i = A, B$

$G = G_A + G_B = \Sigma G_i$

Y_i = inntekter til individ i, $i = A, B$

P_x = pris på det private godet

P_g = pris på det kollektive godet.

Fagtrykk Trondheim AS 05.2014

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10007

Dato/*Date:* 14.12.16 Side/*Page:* 7

Emnekode/*Subject* SØK2103 Antall ark/*Number of pages:* 10

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Vi kan først se hvordan resultatet vil bli hvis individene tar beslutningene individuelt. Da vil vi få en Cournot-nash likevekt hvor individene konsumerer med kun hensyn på sin egen nytte:

Nyttefunksjon: $U_i(X_i, G)$

Budsjettbetingelse: $Y_i = P_x X_i + P_g G_i$

Vi antar her at individene A og B har identiske nyttefunksjoner og budsjettbetingelse. De vil dermed få lik resultat.

$$L = U_i(X_i, G) - \lambda(P_x X_i + P_g G_i - Y_i)$$

FOB:
$$\frac{\partial L}{\partial X_i} = \frac{\partial U_i}{\partial X_i} - \lambda P_x = 0 \rightarrow \lambda = \frac{\frac{\partial U_i}{\partial X_i}}{P_x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial G} = \frac{\partial U}{\partial G} - \lambda P_g = 0 \rightarrow \lambda = \frac{\frac{\partial U_i}{\partial G}}{P_g}$$

Vi setter: $\lambda = \lambda$: $\dfrac{\frac{\partial U_i}{\partial X_i}}{P_x} = \dfrac{\frac{\partial U_i}{\partial G}}{P_g}$

$$\frac{P_g}{P_x} = \frac{\frac{\partial U_i}{\partial G}}{\frac{\partial U_i}{\partial X_i}} = \text{individ } i\text{'s MRS}$$

Vi ser her at individene vil konsumere G helt til de er indifferent mellom G og X_i. Dvs. at prisforholdet mellom godene er lik økningen i nytten til individ i ved én ekstra G i forhold til én ekstra X_i. Hvert enkelt individ tar her kun hensyn til sin egen nytte.

Den gule kopien beholder du/*Please keep the yellow page*

Fagtrykk Trondheim AS 05.2014

NTNU

Kandidat nr./Candidate no. 10007

Dato/Date: 14.12.16 Side/Page: 8

Emnekode/Subject SØK 2103 Antall ark/Number of pages: 10

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

Nå kan vi se hvordan resultatet vil bli hvis individene samarbeider. Da vil vi få en pareto-optimal tilpasning hvor individene også tar hensyn til nytten til de andre individene i samfunnet når de skal bestemme hvor mye de skal konsumere av godene:

Samfunnets nyttefunksjon: $W = \gamma_1 U + \gamma_2 U_2 + \dots + \gamma_n U_n = \Sigma \gamma_i U_i$

Samfunnets budsjettbetingelse: $\Sigma Y_i = P_x \Sigma X_i + P_g G$

Vi antar også her at alle individene har identiske nyttefunksjoner og budsjettbetingelse. (γ_i = vektlegging av nytte)

$$L = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i U_i - \lambda(P_x \Sigma X_i + P_g G - \Sigma Y_i)$$

FOB: $$\frac{\partial L}{\partial X_i} = \gamma_i \frac{\partial U_i}{\partial X_i} - \lambda P_x = 0 \rightarrow \lambda = \frac{\frac{\partial U_i}{\partial X_i}}{P_x} \times \gamma_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial G} = \Sigma \gamma_i \frac{\partial U_i}{\partial G} - \lambda P_g = 0 \rightarrow \lambda = \frac{\frac{\partial U_i}{\partial G}}{P_g} \times \gamma_i$$

Vi setter: $\lambda = \lambda$: $$\gamma_i \frac{\frac{\partial U_i}{\partial X_i}}{P_x} = \Sigma \gamma_i \frac{\frac{\partial U_i}{\partial G}}{P_g}$$

$$\rightarrow \frac{P_g}{P_x} = \Sigma \frac{\frac{\partial U_i}{\partial G}}{\frac{\partial U_i}{\partial X_i}} \rightarrow \text{samfunnets MRS}$$

$\overline{}$ Summ

Vi ser her at individene vil konsumere G helt til hele samfunnet er indifferent mellom G og Xi. De tar hensyn til nytten til alle individene i samfunnet når de skal avgjøre hvor mye de skal konsumere av godet. Det pareto-optimale omfanget av et kollektivt gode i en økonomi med to konsumenter vil dermed være når prisforholdet mellom godene er lik økningen i nytten til alle individene i samfunnet ved én enhet ekstra G i forhold til én enhet ekstra av Xi. Dette er optimalt tilpasning for samfunnet.

Den gule kopien beholder du/Please keep the yellow page

Fagtrykk Trondheim AS 05.2014

Oppg. 3

Hvis vi sammenligner individuelle beslutninger og samarbeid:

Cournot-nash likevekt: $\frac{P_g}{P_x} = \frac{\frac{\partial U_i}{\partial G}}{\frac{\partial U_i}{\partial x_i}}$

Pareto-optimal: $\frac{P_g}{P_x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial U_i}{\partial G}}{\frac{\partial U_i}{\partial x_i}}$

Så ser vi at: $\frac{\frac{\partial U_i}{\partial G}}{\frac{\partial U_i}{\partial x_i}} < \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial U_i}{\partial G}}{\frac{\partial U_i}{\partial x_i}}$

Det vil dermed bli konsumert for lite av det kollektive godet hvis konsumentene ikke samarbeider i forhold til hvis de samarbeider. Dette er siden hvert enkelt individ ønsker at de andre i samfunnet skal finansiere det kollektive godet mer enn det de selv gjør, når de tar beslutningene individuelt. Dette fører til at det totalt i samfunnet vil bli konsumert mindre.

Vi kan f.eks se på en situasjon hvor $U_i(x_i, G) = \ln(x_i) + \ln(G)$

Cournot-nash likevekt vil da bli:

$\frac{P_g}{P_x} = \frac{\frac{\partial U_i}{\partial G}}{\frac{\partial U_i}{\partial x_i}} = \frac{\frac{1}{G}}{\frac{1}{x_i}} = \frac{x_i}{G} \longrightarrow x_i = \frac{P_g G}{P_x}$

→ Dette er for hvert enkelt individ

⟶

Oppg. 3

Totalt i samfunnet vil bli:

Samfunnets budsjett betingelse

$$\sum Y_i = P_x \sum X_i + P_g G \rightarrow \underline{nY_i = P_x n X_i + P_g G}$$

Setter inn X_i i denne:

$$nY_i = \cancel{P_x}\, n\left(\frac{P_g G}{\cancel{P_x}}\right) + P_g G = P_g G(n+1)$$

$$\rightarrow G^{CN} = \frac{nY_i}{P_g(n+1)}$$

Pareto-optimalt-tilpasning vil da bli:

$$\frac{P_g}{P_x} = \sum \frac{\frac{\partial U_i}{\partial G}}{\frac{\partial U_i}{\partial X_i}} = n \times \frac{\frac{1}{G}}{\frac{1}{X_i}} = n\frac{X_i}{G}$$

$$\rightarrow X_i = \frac{P_g G}{P_x n}$$

Setter inn i samfunnets budsjett betingelse:

$$nY_i = \cancel{P_x n}\left(\frac{P_g G}{\cancel{P_x n}}\right) + P_g G = 2P_g G$$

$$\rightarrow G^{PO} = \frac{nY_i}{2P_g}$$

Med dette ser vi at $G^{CN} = \frac{nY_i}{P_g(n+1)} < G^{PO} = \frac{nY_i}{2P_g}$

Huis vi har to konsumenter: $n=2 \rightarrow G^{CN} = \frac{2 \cdot Y_i}{P_g 3} < G^{PO} = \frac{\cancel{2} Y_i}{\cancel{2} P_g}$

$$\rightarrow G^{CN} = \frac{2}{3}\frac{Y_i}{P_g} < G^{PO} = \frac{Y_i}{P_g}$$