## Oppgave 1

Forutsetninger:
- n identiske bed.
- homogene varer
- profittmaksimerende bed.
- simultane trekk
- Invers ettersp.: $P(Q) = a - Q$ , $a > Q$
- Like marg. kostnader $\quad Q = \Sigma q_i$
- Profittfunk.: $\Pi = P(Q)q - cq$

a) Tilfellet hvor $n=2$:

Bed. 1 maksimerer:

$$\max_{q_1 \geq 0} \Pi_1 = (a - q_1 - q_2 - c)q_1$$

FOB: $a - 2q_1 - q_2 - c = 0$

$$q_1 = \frac{a - c - q_2}{2} = Y_1(q_2) \qquad (1)$$

Tilsvarende for bed. 2:

Fra FOB: $q_2 = \frac{a - c - q_1}{2} = Y_2(q_1) \qquad (2)$

(1) og (2) er reaksjonsfunk. til bed. 1 og 2. Det er bed. i's beste respons på trekk til bed. j. Kan illustreres grafisk.

Kandidat nr./*Candidate no.* 10038

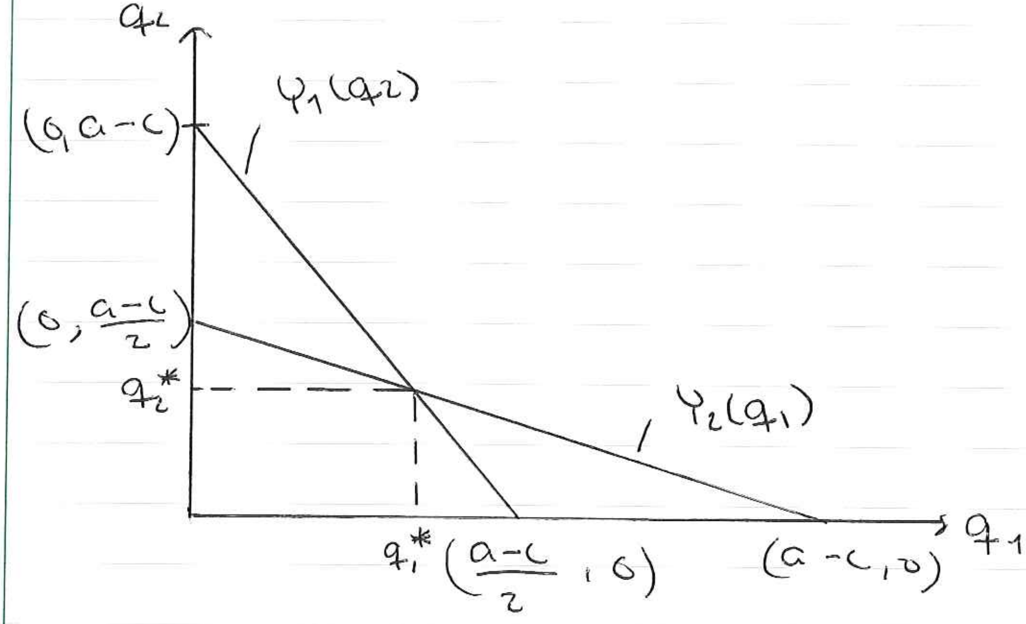
Dato/*Date:* 20.05.15 Side/*Page:* 2

Emnekode/*Subject* SØK3005

Antall ark/*Number of pages:* 19

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

*This column is for external examiner*




Finner løsningen ved å løse (1) og (2) for $q_1$ og $q_2$. Setter inn for $q_2$ i (1):

$$2q_1 = a - c - \left(\frac{a - c - q_1}{2}\right)$$

$$4q_1 = 2a - 2c - a + c + q_1$$

$$3q_1 = a - c$$

$$q_1^* = \frac{a-c}{3}$$

Tilsvarende for bed. 2:

$$q_2^* = \frac{a-c}{3}$$

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

$$Q^* = \frac{2(a-c)}{3}$$

Finner profitten:

$$\pi_1 = (a - Q - c)q_1$$

$$= \left(a-c-\frac{2(a-c)}{3}\right)\left(\frac{a-c}{3}\right)$$

$$= \frac{(a-c)^2}{9}$$

Tilsvarende profitt for bed. 2.

Skal se på monopolsituasjonen:

$$\max_{Q \geq 0} \pi = (a-Q-c)Q$$

FOB: $a - 2Q - c = 0$

$$Q^M = \frac{a-c}{2}$$

Profitten blir:

$$\pi = \left(a-c-\frac{a-c}{2}\right)\frac{a-c}{2}$$

$$= \frac{(a-c)^2}{4}$$

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Har fra Nash-løsningen:

$$q_i^* = \frac{a-c}{3}, \quad Q^* = \frac{2(a-c)}{3}$$

$$\pi_i^N = \frac{(a-c)^2}{9}$$

Har fra monopolløsningen:

$$Q^M = \frac{a-c}{2}, \quad \pi^M = \frac{(a-c)^2}{4}$$

Kvantum er altså lavere under monopol enn under Nash-løsningen. Det lavere kvantumet medfører en høyere pris og dermed høyere profitt. Vi ser videre at hvis bed. 1 og 2 skulle ha samarbeidet og delt monopolprofitten så hadde det medført en høyere profitt til dem begge:

$$\pi^M/2 = \frac{(a-c)^2}{8} > \frac{(a-c)^2}{9} = \pi_i^N$$

b) Skal utvide til et vilkårlig ant. bed.
Kan nå skrive at: $Q = q_i - Q_{-i}$

Bed. i maksimerer:

$$\max_{q_i \geq 0} \pi_i = (a - c - q_i - Q_{-i})q_i$$

FOB: $a - c - 2q_i - Q_{-i} = 0$

$$q_i = \frac{a - c - Q_{-i}}{2} = \gamma_i(Q_{-i})$$

Siden alle n bed. er identiske har vi at:

$$Q_{-i} = (n-1)q_i$$

$$\Rightarrow \quad 2q_i = a - c - (n-1)q_i$$

$$q_i(n+1) = a - c$$

$$q_i^* = \frac{a-c}{n+1}, \quad \forall\, i = 1,n$$

Totalt kvantum: $Q^* = (a-c)\frac{n}{n+1}$

Finner prisen: $P(Q) = a - Q$

$$= a - (a-c)\frac{n}{n+1}$$

Finner profitten:

$$\pi_i = (a - c - Q)q_i$$

$$\left(a - c - \frac{a-c}{n+1}n\right)\frac{a-c}{n+1}$$

$$\left(\frac{(a-c)(n+1) - n(a-c)}{n+1}\right)\frac{a-c}{n+1}$$

$$\pi_i = \left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2$$

Hva skjer når $n \to \infty$?

$\lim_{n\to\infty} q_i^* = 0$, prod. i den enkelte bedr. går mot null.

$\lim_{n\to\infty} Q^* = a-c$

$\lim_{n\to\infty} P(Q) = c$, prisen blir presset ned til marg. kostnaden.

$\lim_{n\to\infty} \pi_i = 0$, når prisen blir lik marg.-kostnadene så vil profitten bli lik null.

Kandidat nr./Candidate no. 10038

NTNU

Dato/Date: 20.05.15 Side/Page: 7

Emnekode/Subject SØK3005

Antall ark/Number of pages: 19

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

## Oppgave 2

En gårdseier leier bort jord til en forpakter. Verdien av avlingene er avhengig av været.

$X_i$, $i = L, H$ – verdi på avling

$p_H$ – sann. for godt vær
$p_L$ – — " – dårlig vær

$w_i = w(x_i)$ – leien som en funk. av avlingen

Eierens nyttefunk:

$$\sum_i p_i B(w_i) \quad , \quad B' > 0 \, , \, B'' \leq 0$$

Forpakterens nytte:

$$\sum_i p_i u(x_i - w_i) \quad , \quad u' > 0 \, , \, u'' \leq 0$$

a) • Nyttefunk. sier at både eieren og forpakteren enten er risikoaverse eller risikonøytrale:
- Dersom $B'' = 0$, $u'' = 0$, da er de begge risikonøytrale
- Dersom $B'' < 0$ og $u'' < 0$, da er de begge risikoaverse.

Risikoaversjon medfører en konkav nyttefunk., mens risikonøytralitet medfører en lineær nyttefunk.

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

b) Eieren formulerer en kontrakt:

Skal finne en leie, $w(x_i)$, som er en funk. av avlingen. Denne leien skal maksimere eierens forventet nytte, men den må også være satt slik at forpakteren ønsker å godta leiekontrakten.

Antar at forpakteren har en reservasjonsnytte lik $\bar{U}$. Da må kontrakten oppfylle bet.:

$$\sum p_i u(x_i - w(x_i)) \geq \bar{U}$$

Forpakteren må minst motta sin reservasjonsnytte for at han skal være interessert i leiekontrakten.

Maks. problemet til eieren blir:

$$\max_{w(x_i)} \sum p_i B(w(x_i))$$

$$\text{ubb.} \quad \sum p_i u(x_i - w(x_i)) \geq \bar{U}$$

Siden vi kun har to utfall blir problemet forenklet til:

$$\max_{w(x_i)} \quad p_H B(w(x_i)) + p_L B(w(x_i$$

$$\text{ubb.} \quad p_H u(x_i - w(x_i)) + p_L u(x_i - w(x_i)) \geq \bar{U}$$

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

$$\mathcal{L} = P_H B(w(x_i)) + P_L B(w(x_i)) + \lambda[P_H u(x_i - w(x_i)) + P_L u(x_i - w(x_i)) - \bar{U}]$$

FOB: $P_H B'(w(x_i)) + P_L B'(w(x_i)) - \lambda[P_H u'(x_i - w(x_i)) + P_L u'(x_i - w(x_i))] = 0$

$$\Rightarrow \lambda(P_H + P_L)u'(x_i - w(x_i)) = (P_H + P_L)B'(w(x_i))$$

$$\lambda = \frac{B'(w(x_i))}{u'(x_i - w(x_i))} > 0 = \text{konstant} \ \forall i = L, H$$

Dvs. at med de to utfallene har vi at:

$$\frac{B'(w(x_H))}{B'(w(x_L))} = \frac{u'(x_H - w(x_H))}{u'(x_L - w(x_L))}$$

Den optimale kontrakten er satt slik at forholdet mellom marg. nytten i de to tilfellene er lik for eier og forpakter. Altså ~~MRS~~ har vi optimum der $MRS_E = MRS_F$, og det skjer der hver indiff. kurvene tangerer.

Kan illustrere løsningen grafisk i en Edgeworth-boks:

NTNU

Kandidat nr./Candidate no. 10038

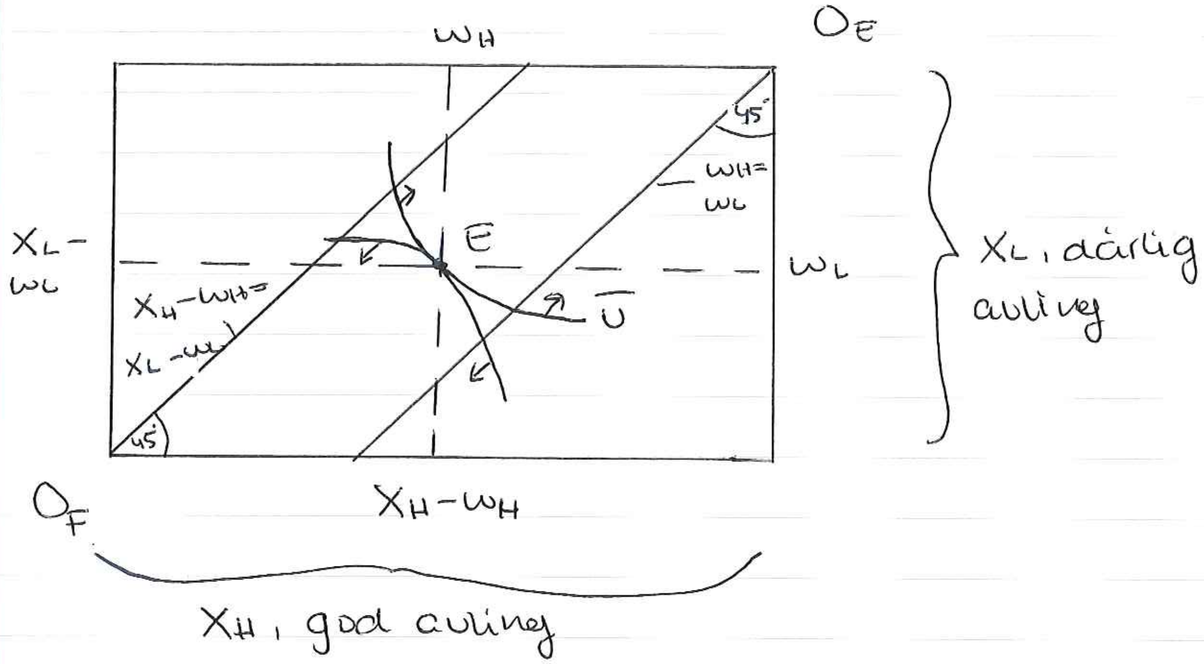
Dato/Date: 20.05.15 Side/Page: 10

Emnekode/Subject SØK3005

Antall ark/Number of pages: 19

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner




Den optimale kontrakten vil være utformet slik at løsningen på optimeringsproblemet er i pkt. E, hvor indiff.kurvene tangerer. Det gir profitt i tilfellet:

- $X_H$: $w_H$ til eier
  $(X_H - w_H)$ til forpakter
- $X_L$: $w_L$ til eier
  $(X_L - w_L)$ til forpakter

Eier ønsker en tangering så langt mot det nedre venstre hjørnet, mens forpakter ønsker tangering så langt som mulig til det øvre høyre hjørnet.

~~Hvor tangeringen oppstår er~~ Hvilken tangering som gir optimum er avhengig av reservasjonsnytten til forpakteren. Som vi så fra FOB så binder bibet. Slik at forpakteren mottar sin reservasjonsnytte.

Den gule kopien beholder du/*Please keep the yellow page*

Fagtrykk Trondheim AS 04.2013

c) Anta nå at eieren er risikonøytral, altså at $B'' = 0$. Kan da skrive nyttefunk. som:

$$B(w_i) = w_i$$

Maks. problemet blir:

$$\max_{w(x_i)} \; p_H w(x_i) + p_L w(x_i)$$

$$\text{ubb.} \; p_H u(x_i - w(x_i)) + p_L u(x_i - w(x_i))$$

Fra FOB får vi at:

$$\lambda = \frac{1}{u'(x_i - w(x_i))} > 0 = \text{konstant} \; \forall i = H, L$$

Vi har nå at:

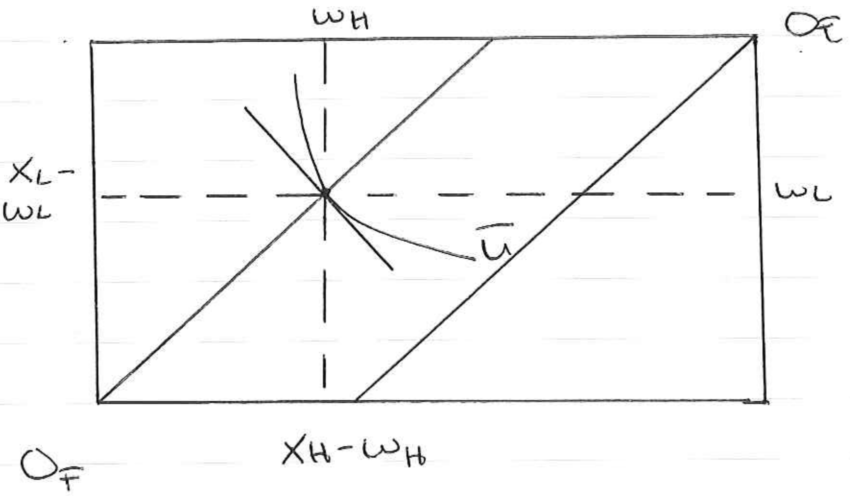
$$\frac{u'(x_H - w(x_H))}{u'(x_L - w(x_L))} = 1$$

For en konkav funk. kan ~~kun~~ dette kun være tilfellet når: $x_H - w(x_H) = x_L - w(x_L)$

$\Rightarrow$ Profitten til forpakteren er konstant. Når eieren er risikoavers så tar han på seg all risiko.

I en Edgeworth-boks vil vi i dette tilfellet få løsning på 45°-gradeslinja til forpakteren:

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner




Risikonøytralitet medfører lineære indiff.-kurver. Optimal løsning er fortsatt der hvor indiff.kurvene tangerer, men nå vil tangeringen skje på 45°-linja til forpakteren. Eieren "forsikrer" altså forpakteren mot all variasjon i resultatet. Løsningen er også i dette tilfellet avh. av reservasjonsnytten til forpakteren.

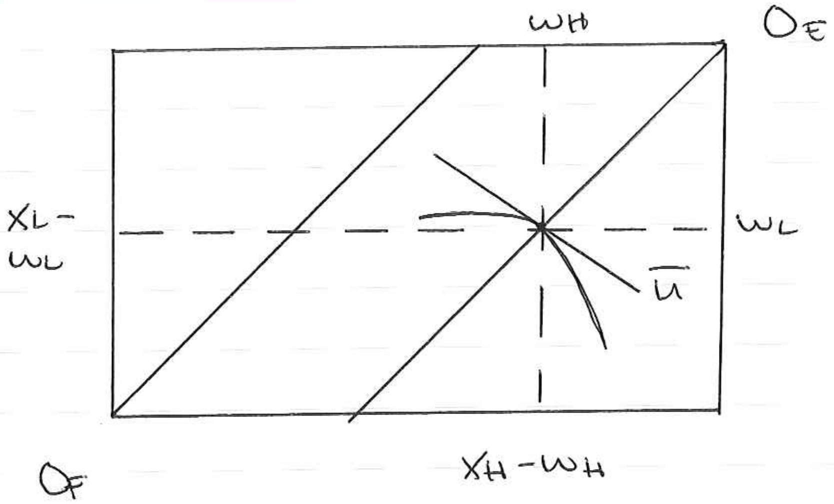
Antar nå at det er forpakteren som er risikonøytral, altså at $u'' = 0$.

Fra FOB vil vi nå få:

$$\lambda = B'(w(x_i)) > 0 \text{ , konstant } \forall\ i = H, L$$

$$\Rightarrow \frac{B'(w(x_H))}{B'(w(x_L))} = 1 \Rightarrow w(x_H) = w(x_L)$$

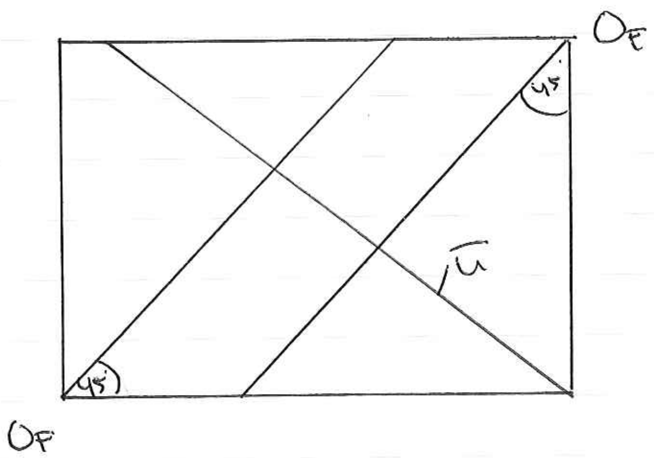
Nå er det forpakteren som tar all risiko, mens eieren mottar lik leie uavhengig av resultatet. I en Edgeworth-boks ser det slik ut:




Optimal tilpasning er nå på 45°-linja til eieren. Fordelingen av profitten er som før avh. av reservasjonsnytten til forpakteren.

Det siste tilfellet er dersom de begge er risikonøytrale, $B'' = 0$ og $u'' = 0$.

Fra FOB får vi at $\lambda = 1$, så vi vet at bibet. binder. Men siden de begge nå har lineære indiff. kurver er vi ikke i stand til å løse problemet. Alt vi kan si er at løsningen vil være en eller annen plass langs indiff. kurven som gir reservasjonsnytten til forpakteren.



Oppgave 3

$t = 2$

$y_1$ – inntekt periode 1
$s$ – sparing fra periode 1 til 2
$\tilde{r}$ – avkastning på sparing, potensielt usikker
$y_2$ – inntekt periode 2
$\beta$ – diskonteringsfaktor

Har at $\beta = 1$, altså legger konsumenten like stor vekt på konsumet idag som konsumet imorgen.

Siden alt konsumeres i løpet av de to periodene trenger vi ingen bibet. – vet at vi ligger på budsjettrestriksjonen.

Konsumenten er risikoavers:

$u(c)$, $u'(c) > 0$, $u''(c) < 0$

a) Har at: $c_1 = y_1 - s$
$c_2 = y_2 + s(1+r)$

Total konsum er altså en funk. av sparing,
$V(s)$, $V'(s) > 0$, $V''(s) < 0$.

Avkastning på sparing er sikker: $r = E\tilde{r}$

Optimeringsproblemet blir:

$$\max_{s \geq 0} V(s) = u_1(c_1) + u_2(c_2)$$

$$= u_1(y_1 - s) + u_2(y_2 + s(1+r))$$

FOB: $u_1'(y_1 - s)(-1) + u_2'(y_2 + s(1+r))(1+r) = 0$

$$u_1'(y_1 - s^*) = u_2'(y_2 + s^*(1+r))(1+r)$$

FOB er en nødvendig bet. for optimal løsning da den gir oss et stasjonærpunkt. FOB sier at marg. nytte av konsum i periode 1 skal være lik marg. nytten av konsum i periode 2.

AOB: $u_1''(y_1 - s) + u_2''(y_2 + s(1+r))(1+r)^2 < 0$

AOB er en tilstrekkelig bet., da den sier at stasjonærpunktet faktisk er et maksimumspkt. AOB vet vi er oppfyllt da $u'' < 0$. Den sier at en ytterligere økning i $s$ gir en mindre økning i marg. nytten i periode 2 enn reduksjonen i marg. nytten i periode 1.

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10038

Dato/*Date:* 20.05.15 Side/*Page:* 16

Emnekode/*Subject* SØK3005 Antall ark/*Number of pages:* 19

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
*This column is for external examiner*

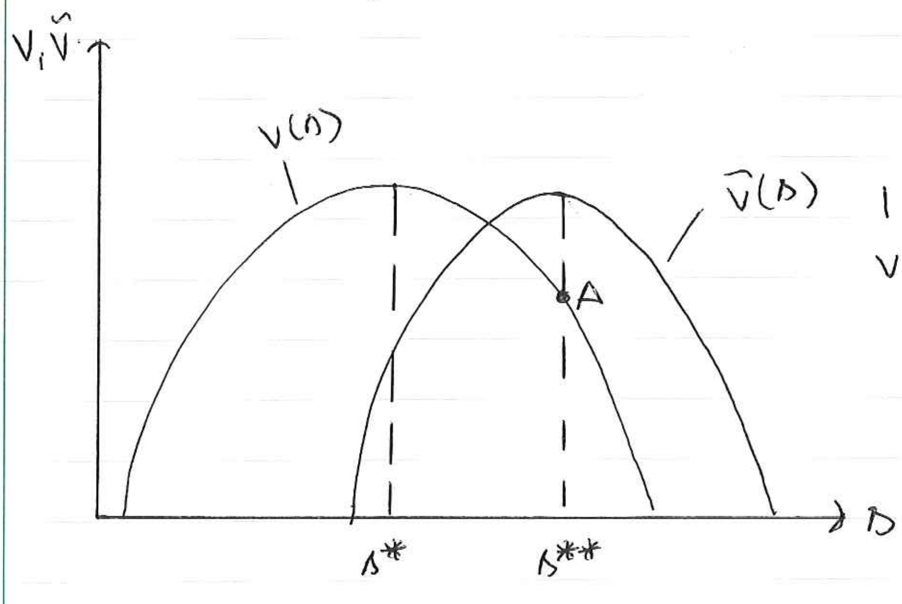
b) Skal nå anta at $\tilde{r}$ er usikker. Må nå maksimere forv. nytte til konsumenten:

$$\max_{s \geq 0} \tilde{V}(s) = u_1(y_1 - s) + E[u_2(y_2 + s(1+\tilde{r}))]$$

$$\text{FOB}: \; u_1'(y_1 - s)(-1) + E[u_2'(y_2 + s(1+\tilde{r}))(1+\tilde{r})] = 0$$

$$u_1'(y_1 - s^{**}) = E[u_2'(y_2 + s^{**}(1+\tilde{r}))(1+\tilde{r})]$$

Fra de to FOB'ene er det ikke mulig å se i hvilket tilfelle sparing er høyest. Man antar at sparing er høyest under usikkerhet, $s^* < s^{**}$. Illustrerer i figur:




I pkt. A vil $V'(s) < 0$.

Setter inn for $s^{**}$ i FOB fra a) og får:

$$-u_1'(y_1 - s^{**}) + u_2'(y_2 + s^{**}(1+r))(1+r) < 0$$

Siden det første leddet i uttrykket ovenfor er det samme som det første leddet i FOB



Fagtrykk Trondheim AS 04.2013

fra b) så har vi at:

$$V'(s) = u_2'(y_2 + s^{**}(1+r))(1+r) - E[u_2'(y_2 + s^{**}(1+\tilde{r}))(1+\tilde{r})] < 0$$

Dvs. at $V'(s) < 0$ kun dersom

$$E[u_2'(y_2 + s(1+\tilde{r}))(1+\tilde{r})] > u_2'(y_2 + s(1+r))(1+r)$$

Generelt har vi at $Eu(r) > u(Er)$. Dette kan kun være tilfellet dersom FOB er konveks i r.

$\Rightarrow h(r) = u_2'(c_2)(1+r)$, hvor $h''(r) > 0$.

c) Eff. av usikkerhet på optimal sparing:

i) Usikkerhet rundt renta kan betraktes som at at sparing blir en mer risikabel plassering av inntekt. Dermed vil den risikoaverse konsumenten ønske å redusere sparing når renta blir usikker. Denne effekten forutsetter risikoaversjon, altså at: $u' > 0$ og $u'' < 0$.

ii) Usikkerhet rundt renten vil kunne ha en potensielt motstridende eff. mot risikoaversjon dersom konsumenten er tilstrekkelig prudent. Usikkerhet rundt renta medfører og usikkerhet rundt fremtidig inntekt. Altså vil en prudent konsument ønske å spare mer for å få økt fremtidig inntekt. Denne effekten forutsetter prudence:

$P = \frac{-u'''}{u''}$, altså når $u''' > 0$ for at eff. er tilstede.

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

Om prudence er tilstede kan vi ikke vite i den generelle formuleringen i opg. a) og b).

d) Har nå at: $u(c) = c - \frac{b}{2}c^2$ , $b > 0$
$1 - bc > 0$

• Ingen usikkerhet:

$$\max_{s \geq 0} V(s) = (y_1 - s) - \frac{b}{2}(y_1 - s)^2 + (y_2 + s(1+r)) - \frac{b}{2}(y_2 + s(1+r))^2$$

$$\text{FOB: } -1 - b(y_1 - s^*)(-1) + (1+r) - b(y_2 + s^*(1+r))(1+r) = 0$$

$$1 - b(y_1 - s^*) = (1+r) - b(y_2 + s^*(1+r))(1+r)$$

• Usikkerhet:

$$\max \hat{V}(s) = (y_1 - s) - \frac{b}{2}(y_1 - s)^2 + E\left[y_2 + s(1+\tilde{r}) - \frac{b}{2}(y_2 + s(1+\tilde{r}))^2\right]$$

$$\text{FOB: } -1 - b(y_1 - s^{**})(-1) + E\left[(1+\tilde{r}) - b(y_2 + s^{**}(1+\tilde{r}))(1+\tilde{r})\right] = 0$$

$$1 - b(y_1 - s^{**}) = E\left[(1+\tilde{r}) - b(y_2 + s^{**}(1+\tilde{r}))(1+\tilde{r})\right]$$

Som tidligere vil vi ha at sparing er større under usikkerhet dersom:

$$E[(1+\tilde{r}) - b(y_2 + s(1+\tilde{r}))(1+\tilde{r})] > (1+r) - b(y_2 + s(1+r))(1+r)$$

Noe som er tilfellet dersom FOB er konveks i r. Med en eksplisitt funk. kan vi sjekke dette.

Har at:

$$h(r) = (1+r) - b(y^2 + s(1+r))(1+r)$$

$$h'(r) = 1 - by^2 - 2bs(1+r)$$

$$h''(r) = -2bs < 0$$

h(r) er konkav, altså vil ulikheten ovenfor ikke holde. Økt usikkerhet medfører dermed ikke mer sparing. Hvis $s > 0$ så vil sparing reduseres når renta blir usikker, for gitt nyttefunk.
Dette resultatet er ikke overraskende da u(c) ikke har prudence-egenskapen:

$$u(c) = c - \frac{b}{2}c^2$$

$$u'(c) = 1 - bc$$

$$u''(c) = -b$$

$$\underline{\underline{u'''(c) = 0}}$$, konsumenten er ikke prudent, dermed ingen motstridende eff. på eff. av usikkerhetsaversjon på sparing når renta blir usikker.