NTNU

Kandidat nr./Candidate no. 10013

Dato/Date: 31.05.16 Side/Page: 1

Emnekode/Subject SØK 3005 Antall ark/Number of pages: 15

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

1

I denne modellen antar vi at banken er monopolist, og dermed kan sette renta som maksimerer sin profitt, uten konkurranse.

Bedriftene har to tilgjengelige prosjekt, A og B, og banken kan ikke observere hvilket som gjennomføres (informasjonsasymmetrien som gir opphav til moral hazard). Begge prosjektene har en investeringskostnad I, med payoff X_i med sannsynlighet p_i, og 0 ellers. Prosjekt A har høyere forventet payoff (det ønskede prosjektet under symmetrisk info):

$$p_A X_A > p_B X_B > I$$

Men $X_B > X_A$ og $p_A > p_B$, som vi skal se kan gi bedriften incentiver til å velge prosjekt B, selv om prosjekt A har ~~større~~ SO, og velges av banken under symmetrisk info (med $R = X_A$).

R

Vi antar at begge aktørene er risikonøytrale, slik at de maksimerer forventet payoff.

Fagtrykk Trondheim AS 12.2015

Kandidat nr./Candidate no. 10013

Dato/Date: 31.05.16 Side/Page: 2

Emnekode/Subject ~~3~~ØK 3005 Antall ark/Number of pages: 15

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Bedriftens forventede payoff: (uformelt omtalt som renta)

$p_i(X_i - R)$

hvor R er nedbetalingen på lånet, som vi har etablert at banken setter.

Bankens forventede profitt:

$p_i R - I$

I første periode låner altså bedriften beløpet I, og betaler tilbake beløpet R i 2. periode, gitt at prosjektet får utbetalingen X_i, og ikke 0.

Det vil være lønnsomt for bedriften å velge prosjekt A om:

$$p_A(X_A - R) \geq p_B(X_B - R)$$

$$p_A X_A - p_B X_B \geq R(p_A - p_B)$$

$$\underline{R} \leq \frac{p_A X_A - p_B X_B}{p_A - p_B} < X_A$$

$$\underline{R} \leq X_A - \frac{p_B(X_B - X_A)}{p_A - p_B}$$

Fagtrykk Trondheim AS 12.2015

NTNU
Kandidat nr./Candidate no. 10013
Dato/Date: 31.05.16 Side/Page: 3
Emnekode/Subject SØK 3005 Antall ark/Number of pages: 15

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

Vi ser at banken må sette renta tilstrekkelig under X_A for å få bedriften til å velge prosjekt A. På vil bedriften få en profitt.

Hvis banken derimot ønsker at bedriften skal gjennomføre prosjekt B, kan banken sette renta til X_B, og bedriften vil fortsatt gjennomføre. Banken vil med andre ord få hele det samfunnsøkonomiske overskuddet mens bedriftens profitt blir null.

Banken setter altså renta lik $\underline{R}$, slik at bedriften velger prosjekt A, når:

$$p_A \underline{R} - I \geq p_B X_B - I$$

$$\frac{p_A X_A - p_B X_B}{p_A - p_B} \geq \frac{p_B X_B}{p_A}$$

$$p_A^2 X_A - p_A p_B X_B \geq p_A p_B X_B - p_B^2 X_B$$

$$X_A \geq \frac{2 p_A p_B X_B - p_B^2 X_B}{p_A^2}$$

$$X_A \geq \left[\frac{2 p_A p_B - p_B^2}{p_A^2}\right] X_B$$

Brøken er mindre enn 1.

NTNU

Kandidat nr./Candidate no. 10013

Dato/Date: 31.05.16 Side/Page: 4

Emnekode/Subject SØK 3005 Antall ark/Number of pages: 15

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Men gitt at det beste for banken er å sette R for å få prosjekt A, vil det bli kreditt rasjonering.

Bedriftene får en positiv payoff fra prosjektet, og et uendelig antall bedrifter vil ønske å låne. Banken vil før eller senere gå tom for midler å låne ut, slik at bare et begrenset antall bedrifter får låne.

Realismen kan selvsagt diskuteres dog. Det kan for eksempel synes urimelig at prosjektet har samme payoff, uansett hvor mange ganger det gjennomføres. Poenget med denne modellen, som bygger på Stiglitz klassiske paper om kredittrasjonering under imperfekt konkurranse, er nettopp å vise at vi under gitte strenge forutsetninger vil få kredittrasjonering, i motsetning til tilfeller med asymmetrisk informasjon, hvor banken kan presse gjennom prosjekt A, og få renta $R = X_A$. Informasjons-asymmetrien gjør at bedriftene kan få profitt. Når $R = X_A$ er bedriftene indifferente mellom å gjennomføre prosjektet og ikke.

JA!

Den gule kopien beholder du/Please keep the yellow page

Fagtrykk Trondheim AS 12.2015

Altså, når vi har symmetrisk informasjon:
- Banken velger prosjekt A, som har størst forventet payoff, og setter $R = X_A$. Bedriftene får ingen profitt, og vi har ikke kredittrasjonering.

Når assymetrisk informasjon:
- Når $p_A \underline{R} > p_B X_B$ ønsker fortsatt banken at bedriftene skal gjennomføre prosjekt A. Bedriftene får imidlertid en informasjonsrente, og positiv profitt. Informasjonsrenten er gitt ved:

$$p_A \left[X_A - \left(X_A - \frac{p_B (X_B - X_A)}{p_A - p_B} \right) \right] = \frac{p_A p_B (X_B - X_A)}{p_A - p_B} > 0$$

- Resultatet er kredittrasjonering, fordi bedrifter vil fortsette å ønske å låne penger til prosjekter, så lenge banken har utlånsmidler igjen. Til slutt vil den gå tom.
- Hvis $p_B X_B > p_A \underline{R}$ får vi markedssvikt. Ingen prosjekt A vil bli gjennomført, selv om dette prosjektet har større forventet payoff enn prosjekt B, og bør gjennomføres inntil banken har lånt ut alle midlene sine.
- Moral hazard-problemet består i at banken ikke vet om bedriften velger A eller B, selv om banken ville insistert på A, dersom det var mulig å observere.

Bra!

Kandidat nr./Candidate no. 10013

Dato/Date: 31.05.16 Side/Page: 6

Emnekode/Subject SØK 3005 Antall ark/Number of pages: 15

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

2

Ikke spurt

La oss først studere hva som skjer om spillerne foretrekker å spille rene strategier

	L	R
T	2, 1	0, 2
B	1, 2	3, 0

2 spiller L: 1 spiller T
2 spiller R: 1 spiller B
1 spiller T: 2 spiller R
1 spiller B: 2 spiller B

Vi ser det ikke eksisterer en Nash-likevekt i rene strategier. En av spillerne vil alltid ønske å endre strategi, gitt den andres. Men la oss si at spillerne randomiserer:

Spiller 2: $(q, 1-q)$
Spiller 1: $(r, 1-r)$

Spiller 1 sin payoff ved T:
$2q + 0(1-q) = 2q$

Spiller 1 sin payoff ved B:
$1 \cdot q + 3(1-q) = 3 - 2q$

Fagtrykk Trondheim AS 12.2015

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

Spiller 2 sin payoff ved L:
$1 \cdot r + 2 \cdot (1-r) = 2 - r$

Spiller 2 sin payoff ved R:
$2 \cdot r + 0 \cdot (1-r) = 2r$

For at spillerne skal velge å randomisere, må begge strategier ha samme forventede payoff:

Spiller 1:
$$2q = 3 - 2q$$
$$q = \frac{3}{4}$$

Er q ~~større~~, vil spiller 1 alltid spille T. Er q mindre, vil 1 alltid spille B.

Spiller 2:
$$2 - r = 2r$$
$$r = \frac{2}{3}$$

Er $r > \frac{2}{3}$ vil spiller 2 alltid velge R, og om $r < \frac{2}{3}$, vil spiller 2 velge L.

R

Fordi vi ikke har en Nash-Likevekt i rene strategier, er $q = \frac{3}{4}$ og $r = \frac{2}{3}$ spillets eneste Nashlikevekt.

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10013

Dato/*Date:* 31.05.16 Side/*Page:* 8

Emnekode/*Subject* SØK 3005 Antall ark/*Number of pages:* 15

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Dette er i samsvar med Nash-teoremet: Et spill med n spillere og endelig strategi rom, vil alltid ha en Nash-likevekt, om vi tillater strategier med randomisering.

En alternativ tolkning av spillet, er at det bare ser ut for spillerne som den andre randomiserer. Snarere er det slik at det tilfeldige elementet ligger i nytten de får av hvert alternativ. Det er kanskje mer realistisk å se for seg at preferansene våre stadig endrer seg litt, enn at vi helt tilfeldig velger mellom alternativer (i en viss proporsjon).
La meg være klar, dette er en hypotetisk tolkning. Slik formulert her, er preferansene statiske, og aktørene randomiserer bokstavelig.

BnA

Fagtrykk Trondheim AS 12.2015

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

3

Dette er et Stackelberg-spill, hvor bedriftene har komplett informasjon, men hvor bedrift 2 og 3 setter kvantum simultant, slik at deres informasjon er imperfekt. Spillet har ett delspill, spillet i periode 2. Vi begynner med å finne Nash-likevekten i dette spillet, og løser deretter bedrift 1 sitt problem i 1. periode.

Bedrift 2 sitt problem:

$$\max_{q_2 \geq 0} \Pi_2 = (a - c - q_1 - q_2 - q_3^*)\, q_2$$

FOB:

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = a - c - q_1 - q_3^* - 2q_2 = 0$$

$$q_2^* = \frac{1}{2}(a - c - q_1 - q_3^*)$$

På grunn av symmetri:

$$q_3^* = \frac{1}{2}(a - c - q_1 - q_2^*)$$

De to bedriftene vil sette samme kvantum:

$$q = \frac{1}{2}(a - c - q_1 - q) = \frac{1}{3}(a - c - q_1)$$

NTNU

Kandidat nr./Candidate no. 10013

Dato/Date: 31.05.16 Side/Page: 10

Emnekode/Subject SØK 3005

Antall ark/Number of pages: 15

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Vi kan nå gå tilbake til trinn 1 og løse bedrift 1 sitt optimeringsproblem:

$$\max_{q_1 \geq 0} \quad \pi_1 = (a - c - q_1 - q_2^*(q_1) - q_3^*(q_1))\, q_1$$

$$\pi_1 = \left[a - c - q_1 - \frac{2}{3}(a - c - q_1)\right] q_1$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = a - c - 2q_1 - \frac{2}{3}(a-c) + \frac{4}{3} q_1 = 0$$

$$3(a-c) - 6q_1 - 2(a-c) + 4q_1 = 0$$

$$q_1^* = \frac{a-c}{2}$$

$$q = \frac{1}{3}\left[a - c - \frac{a-c}{2}\right] = \frac{a-c}{6}$$

Vi ser med andre ord at det delspill perfekte utfallet er $q_1^* = \frac{a-c}{2}$ og $q_2^* = q_3^* = \frac{a-c}{6}$.

Den delspill-perfekte Nash-likevekten:

$q_1^* = \frac{a-c}{2}$ $\quad q_2^*(q_1) = q_3^*(q_1) = \frac{1}{3}(a - c - q_1)$

Bra.

Kandidat nr./Candidate no. 10013

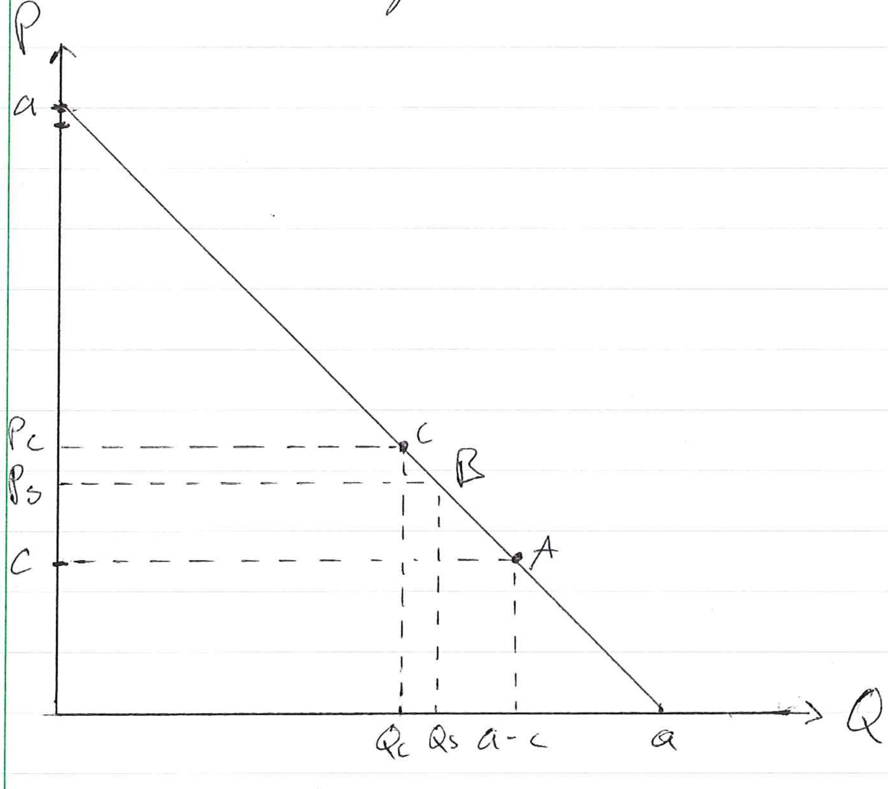
Dato/Date: 31.05.16 Side/Page: 11

Emnekode/Subject SØK 3005 Antall ark/Number of pages: 15

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

I en-periode-spillet med 3 bedrifter, er total produksjon $\frac{3(a-c)}{4}$, mens den her er $\frac{5(a-c)}{6}$. Bedrift 1 bruker sin fordel med å trekke ~~først~~, til å øke sin produksjon på bekostning av de andre. Samfunnsøkonomisk overskudd ~~øker~~, fordi den totale produksjonen stiger. Overskuddet til bedrift 1 stiger fra $\frac{1}{16}(a-c)^2$ til $\frac{1}{12}(a-c)^2$, mens de andres går ned til $\frac{1}{36}(a-c)^2$.



A: SO er maksimert når $P=c$ og $Q=a-c$

B: Stackelberg-likevekten, med høyere SO enn C.
$Q_S=\frac{5(a-c)}{6}$, $P_S=\frac{a+5c}{6}$

C: Cournot-likevekten, med det laveste SO.
$Q_C=\frac{3(a-c)}{4}$, $P_C=\frac{a+3c}{4}$

Fagtrykk Trondheim AS 12.2015

Kandidat nr./Candidate no. 10013

Dato/Date: 31.05.16 Side/Page: 12

Emnekode/Subject SØK 3005

Antall ark/Number of pages: 15

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

4

a) Sikkerhetsekvivalenten er gitt ved:

$Eu(w+\hat{Y}) = u(w+e)$

Sikkerhetsekvivalenten har samme forventede nytte som lotteriet, og gir dermed betalingsviljen eller verdien på lotteriet.

For et lotteri med $E(\hat{Y})=0$, som her, er risikopremien gitt ved:

$$Eu(w+\hat{Y}) = u(w-\Pi)$$

Dette er altså betalingsviljen for å slippe et lotteri med forventning lik null.

Utregning av sikkerhetsekvivalent i konkret eksempel:

$$0{,}5 \cdot \sqrt{10-6} + 0{,}5 \cdot \sqrt{10+6} = \sqrt{10+e}$$

$$9 = 10+e$$

$$e = -1$$

Lotteriet har en verdi på -1. Individet er villig til å betale 1 for å unngå det. Fordi lotteriet har forventningsverdi lik null, er altså risikopremien gitt ved $\Pi = -e = 1$.

4

b) Begynner med å utlede formelen:

$$Eu(w+\hat{y}) = u(w-\pi)$$

Antar $E(\hat{y})=0$ og $E(\hat{y}^2)=\sigma^2$

Gjør Taylor ekspansjon rundt w:

$$E\left[u(w) + u'(w)(\hat{y}) + \frac{1}{2}u''(w)\cdot\hat{y}^2\right] \approx u(w) - \pi u'(w)$$

$$\pi \approx -\frac{1}{2}\frac{u''}{u'}\cdot\sigma^2 = \frac{1}{2}A(w)\sigma^2$$ (Arrow-Pratt sin formel)

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}(6-0)^2 + \frac{1}{2}(-6-0)^2 = 36$$

$$\pi \approx \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot 10}\right)\cdot 36 = 0{,}9$$

(I oppgave c) finner jeg at $A(w) = \frac{1}{2w}$)

I oppgave a) fant vi at den nøyaktige verdien på risikopremien er 1. Arrow-Pratts formel gir en verdi 0,9, som ligger nokså nært den samme verdien, men det tydeliggjør at det er snakk om en tilnærming.

Kandidat nr./Candidate no. 10013

Dato/Date: 31.05.16 Side/Page: 14

Emnekode/Subject SØK 3005 Antall ark/Number of pages: 15

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

4

c) Absolutt risikoaversjon er gitt ved:

$$A(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Den uttrykker andelen grensenytten faller med, når formuen stiger 1 enhet.

Relativ risikoaversjon:

$$R(w) = -\frac{\frac{du'}{u'}}{\frac{dw}{w}} = w \cdot A(w)$$

Relativ risikoaversjon uttrykker prosentvis nedgang i grensenytten, gitt 1% økning i formuen.

$$u(w) = \sqrt{w}$$
$$u' = \frac{1}{2} w^{-1/2}$$
$$u'' = -\frac{1}{4} w^{-3/2}$$

$$A(w) = -\left(-\frac{1}{4} w^{-3/2}\right) / \left(\frac{1}{2} w^{-1/2}\right) = \frac{1}{2w}$$
$$A'(w) = -\frac{1}{2w^2} < 0$$

Altså har vi fallende absolutt risikoaversjon (DARA).

Kandidat nr./Candidate no. 10013

Dato/Date: 31.05.16 Side/Page: 15

Emnekode/Subject SØK 3005 Antall ark/Number of pages: 15

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

$$R(w) = \frac{1}{2w} \cdot w = \frac{1}{2}$$

Altså har vi konstant relativ risikoaversjon (CRRA). Funksjonen $u(w) = \frac{w^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ er mye brukt i litteraturen, hvor γ er den relative risikoaversjonen. Her har vi benyttet oss av $u(w) = 2 \cdot \frac{w^{1-\gamma}}{1-\gamma}$.

9 Kvar sporsmål

Fagtrykk Trondheim AS 12.2015