Denne kolonne er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Oppgave 1

En investor har valgt om å plassere sin formue i enten et risikofritt aktiva (statsobligasjoner) og et risikabelt aktiva (aksjer).

Vi antar:

α – andelen av formuen som plasseres i aksjer

$(w-\alpha)$ – andelen som plasseres i statsobligasjoner

$\tilde{x}$ – ekstra avkastning ved aksjer

r – avkastning ved statsobligasjoner (risikofri avkastning)

$$\underbrace{(w-\alpha)(1+r)}_{\text{risikofritt}} + \alpha\underbrace{(1+\tilde{x})}_{\text{aksjer}}$$

$$w + wr - \cancel{\alpha} - \alpha r + \cancel{\alpha} + \tilde{x}$$

$$\underbrace{w(1+r)}_{w_0} + \alpha\underbrace{(\tilde{x}-r)}_{\tilde{y}}$$

Hvor:

$w_0 : w(1+r)$ → den risikofrie avkastningen, ved å ha 100% risikofri portefølje

$\tilde{y} : (\tilde{x}-r)$ → ekstra avkastning ved å ta risiko

Vi har da følgende sluttformue:

$$g(\alpha) = w_0 + \alpha\tilde{y}$$

Vi ønsker å finne andel α som maksimerer forventet sluttformue

$$\max_{\alpha} EU[w + \alpha\tilde{y}]$$

$$\frac{\partial EU}{\partial \alpha} = EU'(w+\alpha\tilde{y})\tilde{y} = 0$$

→

Vi gjennomfører en taylor-ekspansjon av $U'(w+\alpha\tilde{y})$

$$\Rightarrow U'(w) + U''(w)\alpha\tilde{y}$$

Setter dette tilbake i førsteordensbetingelsen.

$$E[U'(w)+U''(w)\alpha\tilde{y})\tilde{y}] = 0$$

$$\rightarrow E[U'(w)\tilde{y} + U''(w)\alpha\tilde{y}^2] = 0$$

$$\rightarrow \underbrace{E(\tilde{y})}_{\mu_y} U'(w) + \underbrace{E(\tilde{y}^2)}_{\sigma_y^2+\mu_y^2} U''(w)\alpha = 0$$

hvor μ_y er meravkastningen ved aksjer
$\sigma_y^2+\mu_y^2$ er variansen til meravkastningen

$$\mu_y U'(w) + (\sigma_y^2+\mu_y^2) U''(w)\alpha = 0 \qquad \Big|\cdot \frac{w}{U'(w)}$$

$$w\mu_y + \underbrace{\frac{U''(w)w}{U'(w)}}_{R(w)}(\sigma_y^2+\mu_y^2)\alpha = 0$$

Hvor $R(w)$ er relativ risikoaversjon

$$w\mu_y = R(w)(\sigma_y^2+\mu_y^2)\alpha$$

$$\rightarrow \alpha^* = \frac{w\mu_y}{R(w)\sigma_y^2+\mu_y^2}$$

Dette er beløpet som plasseres i aksjer

$$\frac{\alpha^*}{w} = \frac{\mu_y}{R(w)\sigma_y^2+\mu_y^2} \propto \frac{\mu_y}{R(w)\sigma_y^2}$$

Dette er andelen av formue som plasses i aksjen

Denne kolonne er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Ser altså at andelen som plasseres i aksjer avhenger av:
a) Investors holdning til risiko $R(w)$
b) Verdipapirets forventede avkastning, μ_y
c) Verdipapirets risiko, σ_y^2

Andelen som plasseres i aksjer (α) vil være lik 0 hvis forventet verdi er lik 0:
$\alpha = 0$ hvis $E(\tilde{y}) = 0$.
En risikoavers agent ønsker å unngå risiko, og for at individet skal være villig til å ta risiko, må forventet verdi og forventet avkastning være positiv.
Dersom $E(\tilde{y}) > 0$ vil andelen av formuen som plasseres i aksjer også være positiv, $\alpha^* > 0$
Andelen, α^*, vil reduseres jo mer risikoavers individet er. Derimot vil andelen øke med økt initiell formue, gitt at vi har avtakende risikoaversjon, altså DARA-nyttefunksjon.
Absolutt risikoaversjon er gitt ved:

$$A(w) = -\frac{U''(w)}{U'(w)}$$

$A'(w) < 0$ $\rightarrow$ Avtakende risikoaversjon.
Dette betyr altså at jo rikere du er, jo større risiko tar du. Dette fordi du har avtakende nytte av inntekt jo rikere du blir.

Denne kolonne er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Kan se på et spesialtilfelle med konstant absolutt risikoaversjon (CARA). Dette innebærer at andelen som plasseres i aksjer er uavhengig av initiell formue.

$$A'(w) = 0$$

Slike nyttefunksjoner brukes ofte for å forenkle makroøkonomiske modeller, og er altså langt fra virkeligheten. Slike nyttefunksjoner er urealistiske.

Videre ser vi på konstant relativ risiko, CRRA. Dette innebærer at andelen av formuen som plasseres i aksjer er uavhengig av en endring i formue. Altså har vi fallende absolutt risikoaversjon, men konstant relativ risikoaversjon

$$A(w) \rightarrow A'(w) < 0$$

$$R(w) = wA(w) = \text{konstant.}$$

Vi ser altså at andelen som plassere i aksjer vil være høyere:

- Jo høyere forventet meravkastning, μ_y
- Jo lavere varians til meravkastningen, σ_y^2
- Jo lavere risikoaversjon

Vi ser at andelen som plasseres i aksjer er tilnærmet proporsjonal med meravkastningen, mens den er invers proporsjonal med risiko til avkastningen og risikoaversjon.

NTNU

Kandidat nr. / *Candidate no.* 10009

Dato / *Date* 06.06.17 Side / *Page* 5

Emnekode / *Subject:*

Antall ark / *Number of pages:* 27

Denne kolonne er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Vi ser at ved bruk av "fornuftig" grad av relativ risikoaversjon, vil vi få urealistisk høye andeler som plasseres i aksjer.

Svanemerket trykksak fra Skipnes Kommunikasjon
Lisensnr. 241 731

Den gule kopien beholder du / *Please keep the yellow page*

Oppgave 2

Vi ser på et cournot-oligopol med n bedrifter.
Vi antar at beslutningene fettes simultent

Her er totalt kvantum gitt ved :

$Q = q_1 + +q_2 \dots + q_n$

Markedspris: $P(Q) = a - Q$
Vi antar fast enhetskostnad lik c.

Finner først produksjonen til bedrift i:

$\Pi_i = [a - q_i - q_{-i} - c] \, q_i$

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_i} = a - 2q_i - q_{-i} - c = 0$$

$$q_i = \frac{a - q_{-i} - c}{2}$$

Siden vi antar at bedriftene produserer samme mengde kan vi skrive om:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_i} = a - nq_i - q_i - c = 0$$

$$\Rightarrow nq_i + q_i = a - c$$

$$q_i = \frac{a-c}{n+1}$$

Hver bedrift produserer $q_i = \frac{a-c}{n+1}$ ved simultene produksjonsbeslutninger

Totalt kvantum blir da:

$$Q = \frac{n(a-c)}{n+1}$$

Vi finner markedsprisen ved å sette inn for total kvantum

$$P(Q) = a - Q$$

$$= a - \frac{n(a-c)}{n+1}$$

$$= \frac{a(n+1) - n(a-c)}{n+1}$$

$$P(Q) = \frac{a+nc}{n+1}$$

Kan da finne profitten til bedrift i:

$$\pi_i = \left[\frac{a+nc}{n+1} - c\right] \frac{a-c}{n+1}$$

$$= \left[\frac{a+nc-nc-c}{n+1}\right] \cdot \frac{a-c}{n+1}$$

$$= \frac{a-c}{n+1} \cdot \frac{a-c}{n+1}$$

$$\pi_i = \left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2$$

Viser først på hva som skjer med likevektsutfallet når antall bedrifter (n) øker.

- $\frac{\partial q_i}{\partial n} < 0$ Jo flere bedrifter, jo mindre produserer hver enkelt bedrift.

- $\frac{\partial Q}{\partial n} > 0$ Flere bedrifter øker total produksjon

- $\frac{\partial^2 Q}{\partial n^2} < 0$ Flere bedrifter har en positiv, men avtakende effekt på produksjon. Dette er fordi konkurransen øker mellom bedriftene, og dermed produserer hver bedrift mindre.

- $\frac{\partial P}{\partial n} < 0$ Prisen faller jo flere bedrifter som er i markedet grunnet høy konkurranse.

- $\frac{\partial \pi_i}{\partial n} < 0$ Profitten for den enkelte bedrift reduseres pga redusert pris og redusert kvantum.

Ser nå på situasjonen hvor antall bedrifter går mot uendelig, $n \to \infty$

$\lim_{n \to \infty} q_i = 0$ Produksjon pr bedrift går mot 0 når antall bedrifter går mot uendelig.

$\lim_{n \to \infty} Q = a - c$ Total produksjon går mot $a-c$ når antall bedrifter går mot ∞

$\lim_{n \to \infty} P = c$ Markedsprisen går mot c, altså enhetskostnaden, når antall bedrifter går mot uendelig

Fagtrykk Trondheim AS 12.2015

$\lim_{n \to \infty} \Pi_i = 0$ Profitten til bedriftene går mot 0 når antall bedrifter går mot uendelig.

Vi ser altså at likevektsutfallet nærmer seg frikonkurranse-løsningen når antall bedrifter går mot uendelig.
Når flere bedrifter etableres i markedet, vil konkurransen mellom dem øke. Siden vi antar at bedriftene produserer homogene varer, vil konsumentene kjøpe produktet som er billigst. Bedrifter som ikke klarer å presse ned prisen, faller ut av markedet. Etterhvert som mange bedrifter entrer markedet, og konkurransen er stor, vil prisen bli presset ned til bedriftens enhetskostnad.
Dette vil gi bedriftene profitt lik 0

$$\Pi_i = [P - c]q_i$$
$$= [0]q_i$$
$$\underline{\Pi_i = 0}$$

Dette er situasjonen under frikonkurranse, hvor bedriftens pris er lik deres marginalkostnader.
Vi vil derfor med uendelig mange bedrifter nærme oss frikonkurranseløsningen.

Oppgave 3

- Vi har altså en situasjon hvor Kari har nyttefunksjon lik $U(w) = \ln(w)$.
- Hun har en fabrikk (formue) verdt 12 millioner
- Hun står ovenfor et potensielt tap på 8 millioner, med sannsynlighet lik $\frac{1}{4}$.
- Antar forsikringsselskapet har administesjonskostnader lik 20% av utbetalt beløp.

a) Forsikring er å unngå å tape et stort beløp med liten sannsynlighet, ved å tape et lite beløp med stor sannsynlighet, altså forsikringspremien.

Forsikringspremien (prisen på forsikring) er gitt ved:
$P = (1+\lambda)EI(\tilde{x})$

hvor:
- $\tilde{x}$ - er mulig tap
- $E(\tilde{x})$ - forventa tap
- $I = I(\tilde{x})$ - utbetaling av forsikringsselskapet
- P - pris på forsikring
- λ - "loading price" - administrasjonskostnader for forsikringsselskapet
- W_0 - initiell formue

B er forsikringsgraden kari velger.
$I(\tilde{x}) = B\tilde{x}$

Slik at vi kan skrive forsikringspremien:
$P = (1+\lambda)BE(\tilde{x})$

Fagtrykk Trondheim AS 12.2015

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

Vi skal finne ut hvor mye Kari må betale i forsikrings-premie når hun har full-forsikret fabrikken, $\beta = 1$

Vi vet at:

$W_0 = 12$ (millioner)

$\lambda = 0{,}2$

$\hat{x} = 8$ (millioner)

ssh for tap er 25% $\rightarrow \frac{1}{4}$

$P = (1+\lambda)\beta E(\hat{x})$

$\rightarrow P = (1+0{,}2) \cdot 1 \cdot 8 \cdot \frac{1}{4} = \underline{\underline{2{,}4}}$

Kari må altså betale 2,4 (millioner) i forsikringspremie dersom hun ønsker full forsikring.

Dersom forsikringspremien hadde vært aktuarisk rettferdig, altså, $\lambda = 0$, ville forsikringspremien vært lik $\underline{2}$.

Denne kolonne er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

b) Skal finne optimal forsikringsgrad, β^*:

Kari sin sluttformue er gitt ved:

$$\tilde{y} = w_0 - \beta P_0 - (1-\beta)\tilde{X}$$

Dersom $\beta = 1$ (full forsikring):

$$\tilde{y} = w_0 - P_0$$

Dersom $\beta = 0$ (Ingen forsikring)

$$\tilde{y} = W_0 - \tilde{X}$$

Vi skal altså finne β som maksimerer Kari's forventede sluttformue

$$\text{Max } EU(\tilde{y}) = EU(\underbrace{w_0 - \beta P_0 - (1-\beta)\tilde{X}}_{\tilde{y}})$$

$$\frac{\partial EU(\tilde{y})}{\partial \beta} = E[U'(w_0 - \beta P_0 - (1-\beta)\tilde{X})(\tilde{X} - P_0)]$$

$$= E(\tilde{X} - P_0)U'(w_0 - \beta P_0 - (1-\beta)\tilde{X})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\left[\frac{(\hat{X} - P_0)}{(W_0 - \beta P_0 - (1-\beta)\hat{X})}\right] + \frac{3}{4}\left[\frac{-P_0}{W_0 - \beta P_0}\right]$$

ganger med 4, og flytter over

$$\frac{(\hat{X} - P_0)}{W_0 - \beta P_0 - (1-\beta)\hat{X}} = \frac{3P_0}{W_0 - \beta P_0}$$

$$(\hat{X} - P_0)(W_0 - \beta P_0) = 3P_0(W_0 - \beta P_0 - (1-\beta)\hat{X}$$

Denne kolonne er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

$$\Rightarrow \hat{x} W_0 - \hat{x}\beta P_0 - P_0 W_0 + \beta P_0^2 = 3P_0 W_0 - 3P_0^2\beta - 3P_0\hat{x} + 3P_0\beta\hat{x}$$

$$\Rightarrow \beta P_0^2 - \hat{x}\beta P_0 + 3P_0^2\beta - 3P_0\beta\hat{x} = 3P_0W_0 - 3P_0\hat{x} + P_0W_0 - \hat{x}W_0$$

$$\Rightarrow \beta\left[P_0(P_0-\hat{x}) - 3P_0(\hat{x}-P_0)\right] = W_0\left[P_0 - \hat{x}\right) - 3P_0(\hat{x} - W_0)$$

$$\Rightarrow \beta^* = \frac{W_0(P_0-\hat{x}) - 3P_0(\hat{x}-W_0)}{P_0(P_0-\hat{x}) - 3P_0(\hat{x}-P_0)}$$

Setter inn:

$$\beta^* = \frac{12(2{,}4-8) - 3\cdot 2{,}4(8-12)}{2{,}4(2{,}4-8) - 3\cdot 2{,}4(8-2{,}4)} = \frac{5}{7} = \underline{\underline{0{,}7142}}$$

Dette er den optimale forsikringsgraden kari kan velge.
Finner nå forventet nytte av β^*

$$\frac{1}{4}\ln\left[12 - (0{,}7142\cdot 2{,}4) - (0{,}2858)\cdot 8\right] + \frac{3}{4}\left[12 - (0{,}7142\cdot 2{,}4)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\ln(7{,}9995) + \frac{3}{4}\ln(10{,}2859)$$

$$\underline{\underline{= 2{,}2679}}$$

Kan sammenlikne dette ved nytten kari får ved hhv $\beta = 1$ og $\beta = 0$, for å bekrefte at vi har maksimert nytten.

Forventet nytte ved $\beta = 1$

$$\ln[12 - 2{,}4]$$

$$= 2{,}2617$$

Forventet nytte ved $\beta = 0$

$$\frac{1}{4}\ln[12 - 8] + \frac{3}{4}\ln[12]$$

$$= 2{,}21$$

Ser altså at forsikringsgraden $\beta^* = 0{,}7142$ maksimerer Kari's nytte. Ser altså at at det ikke er optimalt med full forsikring når $\lambda > 0$, altså når vi ikke har aktuarisk rettferdig pris på forsikring. Dette skal jeg se nærmere på i oppgave d).

Denne kolonne er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

c) Skal nå se hva som skjer når fabrikkens verdi stiger til 16 millionr ($w_0 = 16$)

Setter inn for fabrikkens verdi i formelen for β^*

$$\beta^* = \frac{16(2{,}4-8) - 3\cdot 2{,}4(8-16)}{2{,}4(2{,}4-8) - 3\cdot 2{,}4(8-2{,}4)} = \underline{\underline{0{,}5952}}$$

Ser her at optimal forsikringsgrad (β^*) faller når formuen øker. Dette tyder på at vi har fallende absolutt risikoaversjon.

$$\left.\begin{aligned} A(w) &= -\frac{u''(w)}{u'(w)} \\ A'(w) &< 0 \end{aligned}\right\} \text{DARA-nyttefunksjoner}$$

Altså vil marginalnytten av inntekt falle når inntekten øker med én dollar.
Vi ser altså at når inntekten øker, vil risikoaversjonen til individet falle. Man tar altså større risiko når inntekten øker. Dette kan forklares ved at mulig tap på 8 millionr er en mindre andel av formuen når inntekten er 16 millionr, i forhold til når formuen var 12 milioner.

Forsikringsgraden er altså en fallende funksjon av formuen.

Denne kolonne er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

d) Skal se hva som skjer med β^* når forsikringsselskapet eliminerer administrasjonskostnadene.

Nå vil altså $\lambda = 0$, slik at forsikringspremien vil være aktuarisk rettferdig. Altså vil individet kun betale for forventet tap.

$P = (1+\lambda)\beta E(\tilde{X})$

$P = \beta E(\tilde{X})$

$P = 8 \cdot \frac{1}{4} = \underline{2}$

Forsikringspremien blir nå lik 2, som er lik forventet tap ved brann.

Finner nå optimal β:

$$\beta^* = \frac{12(2-8) - 3\cdot 2(8-12)}{2(2-8) - 3\cdot 2(8-2)} = \underline{\underline{1}}$$

Dersom vi har aktuarisk riktig pris på forsikring ($\lambda=0$) vil det være optimalt med full-forsikring, $\beta=1$. Her vil Kari betale forsikringspremie lik forventet tap ved brann.

I realiteten vil forsikringsselskapet ha administrasjonskostnader, samt at de er interessert i å tjene penger. Det vil derfor aldri (i den virkelige verden) være optimalt med full forsikring. Når $\lambda > 0$ vil det være optimalt med delvis forsikring.

Denne kolonne er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Et risikoavest individ ønsker høyere forsikringsgrad enn et risikonøytralt individ.
Et risikonøytralt individ er villig til å betale en risikopremie (π) i tillegg til forventet tap, for å unngå risiko (tap)

Risikoavers: $E(\tilde{X}) + \pi$
Risikonøytral: $E(\tilde{X})$

Når forsikringsgraden blir veldig høy (nær 1), vil risikopremien det risikoavese individet er villig til å betale være svært lavt.
Her vil λ ved å bli full-forsikret være høyere enn økningen i β, slik at individet kun vil ønske delvis forsikring.
Altså vil individet nærme seg risikonøytralitet.

Denne kolonne er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Oppgave 4

Vi har altså en situasjon hvor en agent skal gjøre en jobb for en prinsipal, hvor prinsipalen skal tilby en kontrakt som agenten må godta.
Her antar vi full informasjon, som vil si at agentens innsats er verifiserbar og observerbar, og kan dermed kontraktfestes.

Symbolforklaring
e – agentens innsats
x_i – verdien av agentens produksjon (resultat)
$p_i(e)$ – sannsynlighet for resultat i, gitt innsats
$w(x_i)$ – agentens lønn
$\underline{u}$ – agentens reservasjonsnytte
$(x_i - w(x_i))$ – prinsipalens nettoinntekt
$u(w(x_i)) - v(e)$ = agentens nyttefunksjon
$B(x_i - w(x_i))$ = prinsipalens nyttefunksjon.

Vi antar at prinsipalen ønsker å maksimere sin nytte/profitt, gitt at agenten godtar kontrakten

$$\max \sum p_i(e) B(x_i - w(x_i))$$

ubb

$$(1) \sum p_i(e) u(w(x_i)) - v(e) \geq \underline{u}$$

(1) er deltakerbetingelsen. Den sier altså at agenten må få mer (eller likt) nytte ved å godta kontrakten, som nytten han får ved å ikke godta kontrakten, altså hans reservasjonsnytte.

Denne kolonne er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Her representerer $\sum p_i(e) U(w(x_i))$ forventet nytte av lønn ved kontrakten, mens $V(e)$ representerer kostnader ved å gi innsats for agenten.

Vi har da følgende optimeringsproblem for prinsipalen:

$$\mathcal{L} = \sum p_i(e) B(x_i - w(x_i)) + \lambda\left[\sum p_i(e) U(w(x_i)) - V(e) - \underline{u}\right]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = -\sum p_i(e) B'(x_i - w(x_i)) + \lambda \sum p_i(e) U'(w(x_i)) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{B'(x_i - w(x_i))}{U'(w(x_i))} > 0$$

Vi antar at grensenyttene er strengt positive for begge aktører, og dermed er λ strengt positiv.
Siden $\lambda > 0$, vil deltaker betingelsen holde ved likhet. Prinsipalen ønsker ikke betale agenten mer enn nødvendig, slik at agenten får nytte lik sin reservasjonsnytte, $u = \underline{u}$

Vi antar at for å ha optimal risikodeling, må følgende betingelse holde:

$$(*) \quad \frac{B'(x_i - w(x_i))}{U'(w(x_i))} = \text{konstant}$$

Altså må forholdet mellom grensenytten til prinsipal og agent være konstante.

→

Denne kolonne er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Ser at dette må holde når vi har flere "situasjoner", med ulik nytte i hver situasjon:

$$\frac{B'(x_1 - w_1(x_1))}{U'(w_1(x_1))} = \frac{B'(x_2 - w(x_2))}{U'(w(x_2))}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{B'(x_2 - w(x_2))}{B'(x_1 - w(x_1))}}_{\text{MRS prinsipal}} = \underbrace{\frac{U'(w(x_2))}{U'(w(x_1))}}_{\text{MRS agent}}$$

I optimum vil MRS til agent og prinsipal tangere hverandre. I tillegg må deltakerbetingelsen holde.

Vi antar at prinsipalen ønsker høy innsats fra agenten, siden dette øker sannsynligheten for godt resultat. Siden vi har full info har ikke agenten insentiver til å slunte unna. Det finnes derimot usikkerhet i markedet, slik at dersom agenten har resultatbasert lønn, vil agenten selv bli "straffet" dersom han får et dårlig resultat.

Denne kolonne er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Vi skal nå se på tre ulike situasjoner:
1) Prinsipalen er risikonøytral og agenten er risikoavers
2) Agenten er risikonøytral og prinsipalen er risikoavers
3) Begge er risikoaverse.

1) Prinsipalen er risikonøytral og agenten er risikoavers

Her vil $B'' = 0$, slik at $B' =$ konstant.
Nyttefunksjonen til agenten er konkav.

Vi husker betingelsen for optimal risikodeling.

$$\lambda = \frac{B'(x_i - w(x_i))}{u'(w(x_i))} = \text{konstant.} \quad (*)$$

Siden $B' =$ konstant vil den nå se slik ut:

$$\lambda = \frac{k}{u'(w(x_i))}$$

For at betingelsen $(*)$ skal holde, må agenten også ha konstant u'.

$$u'(w(x_i)) = \frac{k}{\lambda} \Rightarrow \text{konstant.}$$

Altså må agenten få fast lønn for at betingelsen om optimal risikodeling skal holde.
Dette innebærer at prinsipalen må påta seg all risiko, og agenten får fast lønn som er uavhengig av resultat. Dette er fordi det finnes en usikkerhet i økonomien som påvirker resultatet, og denne

NTNU

Kandidat nr. / *Candidate no.* 10009

Dato / *Date* 06.06.17 Side / *Page* 22

Emnekode / *Subject:* sok3005 Antall ark / *Number of pages:* 27

Denne kolonne er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

usikkerheten vil påvirke lønnen til agenten. Dermed er det optimalt for begge parter at agenten får fast lønn.

Vi finner lønnen:

$$u(w^0) - v(e) = \underline{u}$$

$$u(w^0) = \underline{u} + v(e)$$

$$\underline{w^0 = u^{-1}(\underline{u} + v(e))}$$

Her vil lønnen kompensere for agentens kostnader ved innsats, samt dens reservasjons nytte.

Vi finner nå optimal innsats som maksimerer prinsipalen nytte:

$$\sum p_i(e)\, u(x_i - w^0))$$

$$\to \sum p_i(e)(x_i - u^{-1}(\underline{u} + v(e))$$

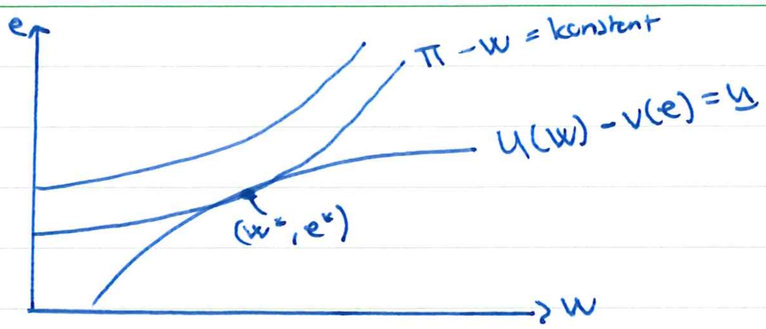
$$\sum p_i'(e)\, x_i - u^{-1\prime}(\underline{u} + v(e)) \cdot v'(e^0)$$

$$\to \sum p_i'(e) x_i = u^{-1\prime}(\underline{u} + v(e)) \cdot v'(e^0)$$

$$= \frac{1}{u'(\underbrace{\underline{u} + v(e^0)}_{w^0})} \cdot v'(e^0)$$

$$\Rightarrow \sum p_i'(e) x_i = \frac{v'(e^0)}{u'(w^0)}$$

Dette er optimal innsats, som maksimerer prinsipalens nytte. Her vil grensenytten av inntekt og innsats være lik for prinsipalen og agenten.


e
$\pi - w$ = konstant
$u(w) - v(e) = \underline{u}$
(w^*, e^*)
w

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

2) Agenten er risikonøytral og prinsipalen er risikoavers.
Her vil $U'' = 0$, $U' =$ konstant.
Her vil agenten måtte ta all risiko, for at vi skal ha optimal risikodeling.

Her vil kontrakten til agenten likne på en franchise-kontrakt, hvor agenten beholder x_i, men betaler prinsipalen en fast "lønn". På denne måten sikres prinsipalen mot variasjoner i resultatet.
Den faste lønnen/profitten til prinsipalen er definert som k. Prinsipalen setter k slik at agenten holder resultatet, men agentens deltakerbetingelse må fortsett holde for at agenten skal godta kontrakten.

Lønnen til agenten vil være $x_i - k$. Prinsipalen bestemmer k ut fra deltakerbetingelsen

$$\sum p_i(e) u[x_i - k] - v(e) = \underline{u}$$
$$\sum p_i(e) u(x_i - k) = \underline{u} + v(e)$$
$$k = \sum p_i(e) x - v(e) - \underline{u}$$

k settes lik differansen av forventet nytte av resultat og kostnaden ved innsats og $\underline{u}$.
Her vil vi ha optimal risikodeling!

3) Dersom begge er risikoaverse

Når både prinsipal og agent er risikoaverse, vil begge måtte ta sin del av risikoen forbundet med resultat. Hvor stor andel av risikoen man tar, avhenger av deres grad av risikoaversjon.

Vi har fortsatt førsteordensbetingelsen:

$$-B'(x_i - w(x_i)) + \lambda U'(w(x_i)) = 0$$

Differensierer denne mhp x_i:

$$-B''\left(\frac{dx_i}{dx_i} - \frac{dw(x_i)}{dx_i}\right) + \lambda U''\left(\frac{dw(x_i)}{dx_i}\right) = 0$$

Setter inn for $\lambda = \frac{B'}{U'}$

$$-B''(dx_i - dw_i) + \frac{B'}{U'} \cdot U''(dw_i) = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{B'}$$

$$\frac{-B''}{B'}(dx_i - dw_i) + \frac{U''}{U'}(dw_i) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\underbrace{\frac{B''}{B'}}_{r_P} + \underbrace{\frac{U''}{U'}}_{r_A}\right] dw_i = \underbrace{\frac{B''}{B'}}_{r_P} dx_i$$

$$(r_P + r_A)\, dw_i = r_P\, dx_i$$

$$\frac{dw_i}{dx_i} = \underbrace{\frac{r_P}{r_A + r_P}}_{\text{Denne er mellom 0 og 1}}$$

Denne sier noe hvor stor andel av risiko hhv prinsipalen og agenten tar, og hvordan dette påvirker deres inntekt

Her vil et dårlig resultat slå ut i begge inntekt, mens i størst grad i inntekten til den som har tatt størst risiko. Tilsvarende vil et godt resultat slå størst ut i lønnen til aktøren som har tatt størst andel av risikoen.

Analytisk vil det se tilsvarende ut for prinsipalen

$$\frac{d(x_i - w)}{dx_i} = \frac{r_A}{r_A + r_P}$$

Dersom r_A er stor, vil det si at agenten er svært risikoavers, og dermed tar prinsipalen størst andel av risikoen.
→ Dermed vil endinger i resultat slå sterkest ut i lønnen til prinsipalen.
Dersom r_P er stor, er prinsipalen veldig risikoavers, og agenten inntekt påvirkes i størst grad av endringer i resultat.

Vi ser altså at de optimale kontraktene vil være forskjellige avhengig av om agenten og prinsipalen er hhv risikoavers eller risikonøytral.

- Har vist at dersom prinsipalen er risikonøytral og agenten er risikoavers, vil det være optimalt å gi agenten fast lønn uavhengig av resultat.
- Dersom agenten er risikonøytral og prinsipalen er risiko-avers, vil det være optimalt med en franchise-kontrakt hvor agenten betaler prinsipalen en fast "profitt" uavhengig av resultat.
- Dersom begge er risikoaverse vil begge måtte ta en del av risikoen ved resultat, og hvor stor andel av risiko hver aktør tar, avhenger av deres grad av risikoaversjon.

NTNU

Kandidat nr. / *Candidate no.* 10009

Dato / *Date* 06.06.17 Side / *Page* 27

Emnekode / *Subject:* SØK3005

Antall ark / *Number of pages:* 27

Denne kolonne er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Merk at disse kontraktene ikke ville vært optimale dersom agentenes innsats ikke var observerbar for prinsipalen. Dette fordi at da ville agentene helt insentiv til å yte lav innsats for å maksimere sin nytte, siden innsats innebærer en kostnad for agenten.

Mai 2017