ECONnect NTNU

Faktor

- en eksamensavis utgitt av ECONnect

Eksamensbesvarelse:
SØK1001 – Innføring i matematisk analyse

Eksamen:	Høsten 2008
Antall sider:	19

Om ECONnect:

ECONnect er en frivillig studentorganisasjon for studentene på samfunnsøkonomi- og finansøkonomistudiet ved NTNU. Vi arbeider for økt faglig kompetanse blant våre studenter samt tettere kontakt med næringslivet. Det gjør vi ved å arrangere fagdager, gjesteforelesninger, bedriftspresentasjoner m.m. I dag går det ca. 200 studenter på bachelornivå (1.-3. klasse) og ca. 70 studenter på masternivå (4.-5. klasse). Studentene på masternivå er fordelt på de to linjene samfunnsøkonomi (ca. 50 stk) og finansiell økonomi (ca. 20 stk). Mer om ECONnect og aktuelle arrangementer på www.econnect-ntnu.no.

ECONnect består av følgende personer ved utgivelsestidspunkt:

Bjørn Bergholt (Leder)	bjorn@econnect-ntnu.no
Sophie S. Strømman (Bedriftsansvarlig)	sophie@econnect-ntnu.no
Maiken Weidle (Fagdagsansvarlig)	maiken@econnect-ntnu.no
Joakim Bjørkhaug (Økonomi- og IT-ansvarlig)	joakim@econnect-ntnu.no
Elise Caspersen	elise@econnect-ntnu.no
Tiril Toftedahl	tiril@econnect-ntnu.no
Louis Dieffenthaler	louis@econnect-ntnu.no
Andreas H. Jung	andreas@econnect-ntnu.no
Mari Benedikte Ellingsen	mari@econnect-ntnu.no
Herman Westrum Thorsen	herman@econnect-ntnu.no

Post- og besøksadresse:	*Organisasjonsnummer:*	*Hjemmeside:*
ECONnect, NTNU Dragvoll Institutt for samfunnsøkonomi Bygg 7, Nivå 5 7491 Trondheim	NO 994 625 314	www.econnect-ntnu.no

Merk: Eksamensbesvarelsene har i varierende grad feil og mangler, både oppsett og innhold. De vil også kun vise en av flere mulige fremgangsmåter. ECONnect står ikke ansvarlig for selve faginnholdet.

Oppgave 1)

a) $y - y_1 = a(x - x_1)$

h_1: $(3,2)$, $a = 2$

$y - 2 = 2(x - 3)$
$y - 2 = 2x - 6$
$y = 2x - 6 + 2$
$\underline{y = 2x - 4}$

h_2: $(3,2)$, $(5,1)$

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$y - 2 = \frac{1-2}{5-3}(x-3)$

$y - 2 = -\frac{1}{2}(x-3)$

$y - 2 = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

$y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2} + 2$

$\underline{y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}}$

h_1: $y = 2x - 4$
h_2: $y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}$

NTNU

Studentnr.

Dato: 5/12-08 Side: 2

Fagnr/emnekode SØK 1001

Antall ark: 13

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

b) Et skift oppover vil føre til en ny likning med y-aksen, 2 høyere opp enn tidligere. Ettersom det kun er snakk om et skift oppover, vil helningen være den samme som tidligere (2X).

Ny likning: $y = 2x - 4 + 2 = 2x - 2$.

$\underline{\underline{y = 2x - 2}}$

Oppgave 2)

a) $f(x) = \sqrt{x} - x = x^{\frac{1}{2}} - x$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 1 = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1}}$

b) $f(x) = \frac{x}{1+x} = \frac{u}{v}$ $\quad u = x \quad u' = 1$

$v = 1+x \quad v' = 1$

$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$f'(x) = \frac{1(1+x) - x \cdot 1}{(1+x)^2}$

$f'(x) = \underline{\underline{\frac{1}{(1+x)^2}}}$

Den gule kopien beholder du

Tapir Uttrykk

c) $f(x)=\sqrt{3x+2} = (3x+2)^{\frac{1}{2}} = u^{\frac{1}{2}}$

$u = 3x+2 \quad u' = 3$

$f'(x) = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot u'$

$f'(x) = \frac{1}{2}(3x+2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3$

$f'(x) = \dfrac{3}{2(3x+2)^{\frac{1}{2}}} = \underline{\underline{\dfrac{3}{2\sqrt{(3x+2)}}}}$

d) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 = u^3$

$u = \left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{m}{n} \qquad m = x+1 \quad m' = 1$

$n = x-1 \quad n' = 1$

$u' = \dfrac{m'n - mn'}{n^2} = \dfrac{1(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x-x-1-1}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

$f'(x) = 3u^2 \cdot u'$

$= 3\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{(x-1)^2}\right) = \underline{\underline{-\frac{6}{(x-1)^2} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}}$

e) $f(x) = e^{x^2+1} = e^u \qquad u = x^2+1 \quad u' = 2x$

$f'(x) = u' \cdot e^u = \underline{\underline{2xe^{x^2+1}}}$

Oppgave 3)

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 \qquad -3 \leq x \leq 3$

a) $\underline{\underline{f'(x) = 6x^2 - 18x + 12}}$

$\underline{\underline{f''(x) = 12x - 18}}$

b) Stasjonære punkter når $f'(x) = 0$

$6x^2 - 18x + 12 = 0$

$$x = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 12}}{2 \cdot 6}$$

$$= \frac{18 \pm \sqrt{324 - 288}}{12} = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{12} = \frac{18 \pm 6}{12}$$

$x_1 = \frac{18+6}{12} = \underline{\underline{2}}$

$x_2 = \frac{18-6}{12} = \underline{\underline{1}}$

Funksjonsverdi:

$f(2) = 2(2)^3 - 9 \cdot (2)^2 + 12 \cdot 2 - 5 = 2 \cdot 8 - 9 \cdot 4 + 24 - 5 = \underline{\underline{-1}}$

$f(1) = 2 \cdot (1)^3 - 9 \cdot 1 + 12 \cdot 1 - 5 = \underline{\underline{0}}$

Stasjonære punkt (med funksjonsverdi): $(2, -1)$ og $(1, 0)$

Globale maksimums- og minimumspunkt er det aller største/minste punktet på grafen i intervallet. Må derfor sjekke om ~~maksimum finne~~ de finnes i stasjonære- eller endepunkt.

Endepunkt når $x=-3$ og $x=3$.

$$f(-3)=2(-3)^3-9(-3)^2+12\cdot(-3)-5$$
$$=2(-27)-9\cdot 9-36-5=\underline{-176}$$

$$f(3)=2(3)^3-9(3)^3+12\cdot 3-5$$
$$=2\cdot 27-9\cdot 9+36-5=\underline{4}$$

Har 4 punkter som alle er kandidater til globalt maksimum/minimum:

(2, -1)
(1, 0)
(-3, -176)
(3, 4)

Ser at den minste verdien, og globalt min. er når $x=-3$, og den største verdien og globalt maks er når $x=3$.

Globalt min. (-3, -176)
Globalt maks. (3, 4)

c) Vendepunkt når $f''(x)=0$

$$12x-18=0$$
$$12x=18$$
$$x=\frac{3}{2}$$

$12x-18 \Rightarrow 12(x-\frac{3}{2})$

x-linje		$\frac{3}{2}$	
12	————		————
$(x-\frac{3}{2})$	- - - - - -	0	————
$f''(x)$	- - - - - -	0	————

Ser at $f''(x)$ skifter fortegn rundt $x=\frac{3}{2}$, det er dermed et vendepunkt.

Funksjonsverdi: $f(\frac{3}{2})=2(\frac{3}{2})^3-9(\frac{3}{2})^2+12(\frac{3}{2})-5$

$$=\frac{27}{4}-\frac{81}{4}+\frac{72}{4}-\frac{20}{4}=-\frac{2}{4}=\underline{-\frac{1}{2}}$$

$f(x)$ har vendepunkt: $\underline{(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})}$

d) Likningen til tangenten til $f(x)$ i punktet $(1,0)$ er gitt ved: $y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$

$x_1=1 \quad f(x_1)=f(1)=0 \qquad ((1,0)=(x_1,f(x_1))$

$f'(x_1)=f'(1)=6\cdot 1^2-18\cdot 1+12=0$

$$y-0=0\cdot(x-1)$$
$$\underline{y=0}$$

NTNU

Studentnr: _

Dato: 5/12-08 Side: 7

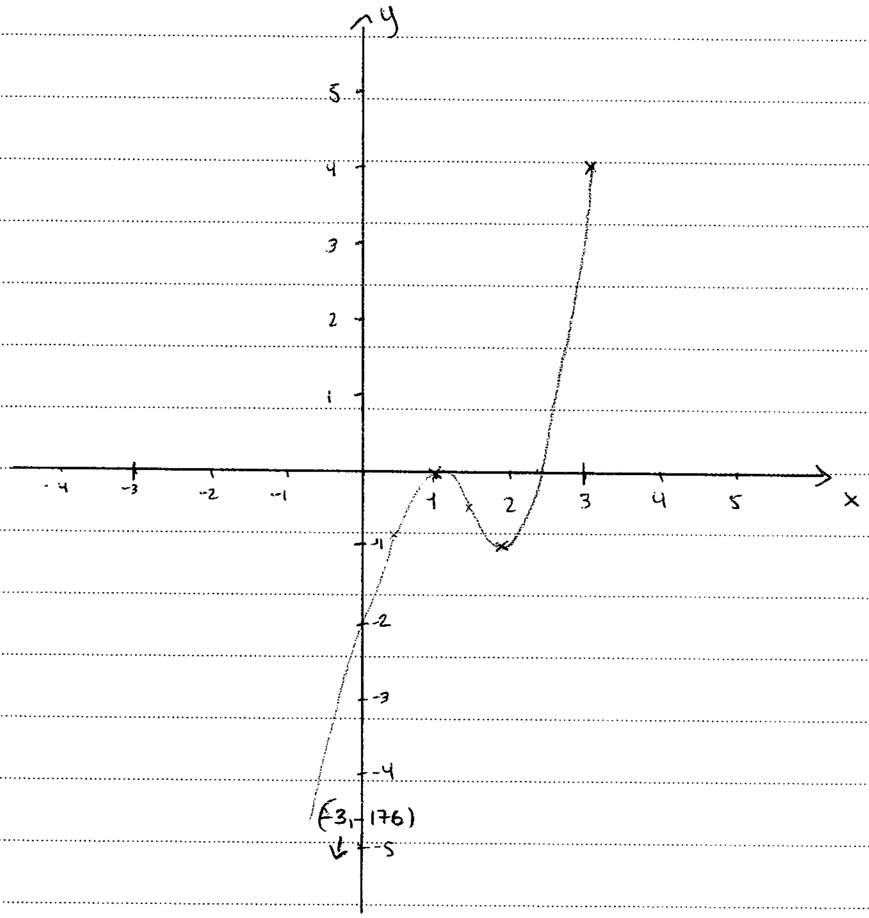
Fagnr/emnekode SØK 1001

Antall ark: 13

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

Likningen $y=0$ forteller at tangenten til $f(x)$ i punktet $(1,0)$ er horisontal. Punktet er dermed et stasjonært punkt, noe som stemmer med det vi fant i oppgave 3b.

g)



Har benyttet punkter jeg har funnet tidligere og tegnet grafen til $f(x)$. Av den ser jeg at det er to nullpunkter, $x=1$ og $x\approx 5/2$. Dette stemmer godt med resultatet som sier at det er to maksimumspunkter (hvor det ene er selve nullpunktet $x=0$) og to minimumspunkter, ~~grafen måtte da ha minimum to nullpunkter (hvor y=0)~~.

NTNU

Studentnr.

Dato: 5/12-08 Side: 8

Fagnr/emnekode SØK 1001

Antall ark: 13

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

Oppgave 4,

$U(x,y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$

a) $\frac{\partial U}{\partial x}$ (den deriverte av U mhp. x) $= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}}}$

$\frac{\partial U}{\partial x}$ (den deriverte av U mhp y) $= \underline{\underline{\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}}}}$

b) $$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{\frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \cdot 2}{\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \cdot 2} = \frac{y^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{y^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-(-\frac{1}{2})}}{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-(-\frac{1}{2})}} = \frac{y^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}} = \underline{\frac{y}{x}}$$

c) $U(x,y) = c$ representerer en nivåkurve for $U(x,y)$, dvs. at den gir ulike verdier for x og y til en gitt c (c tilsvarer z).

$\frac{\partial U}{\partial x}$: viser endringen i U når x endres litt, mens y er konstant.

$\frac{\partial U}{\partial y}$: tilsvarende ressonnement.

NTNU

Studentnr.

Dato: 5/12-08 Side: 9

Fagnr/emnekode SØK 1001

Antall ark: 13

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

$\frac{y}{x} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}$ viser endringen i nivåkurven $U(x,y)=c$ når enten y eller c øker/minker.

Eksempel: Dersom $\frac{y}{x}$ betegner etterspørselen etter melk, hvor: y = lønn
x = pris

Da forteller $\frac{y}{x}$ at etterspørselen vil synke dersom prisen øker og øke dersom inntekten øker.
Dersom c er gitt betegner $\frac{y}{x}$ ulike verdier av x og y som gir c.

Den gule kopien beholder du

Tapir Uttrykk

Oppgave 5)

$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy$

a) Stasjonære punkter når $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$

1) $f'_x(x,y) = 4x - y = 0$
2) $f'_y(x,y) = 2y - x = 0$

Finner y fra 2): $2y - x = 0$

$2y = x$

$y = \frac{x}{2}$

Setter $y = \frac{x}{2}$ inn i 1: $4x - \frac{x}{2} = 0 \quad / \cdot 2$

$8x - x = 0$

$7x = 0$

$\underline{x = 0}$

$x=0$ inn i $y = \frac{x}{2}$: $y = \frac{0}{2}$

$\underline{y = 0}$

Stasjonært punkt: $\underline{(x,y) = (0,0)}$

A: $f''_{xx} = 4$
B: $f''_{xy} = -1$
$f''_{yx} = -1$
C: $f''_{yy} = 2$

(x,y)	A	B	C	$AC-B^2$	Punkt
$(0,0)$	4	-1	2	$(4\cdot 2)-(-1)^2 = 8-1=7$	$A>0$, $AC-B^2>0$: min.

Ser at $(x,y)=(0,0)$ er et lokalt minimumspunkt

b) Benytter Lagrangefunksjonen: $\mathcal{L}(x,y)=f(x,y)-\lambda(g(x,y)-c)$

$$\mathcal{L}(x,y)=2x^2+y^2-xy-\lambda(x+y-10)$$

Førsteordensbetingelsene:

1) $\mathcal{L}_1'(x,y)=4x-y-\lambda=0$
2) $\mathcal{L}_2'(x,y)=2y-x-\lambda=0$
3) $x+y=10$

Finner λ fra 1, og 2, og setter $\lambda=\lambda$:

1) $4x-y=\lambda$
2) $2y-x=\lambda$

$$4x-y=2y-x$$
$$4x+x=2y+y$$
$$5x=3y$$
$$y=\frac{5}{3}x$$

Setter $y = \frac{5}{3}x$ inn i 3) :

$$x + \frac{5}{3}x = 10 \quad / \cdot 3$$

$$3x + 5x = 30$$

$$8x = 30$$

$$\underline{x = \frac{15}{4}}$$

$$y = \frac{5}{3} \cdot \frac{15}{4} = \underline{\frac{25}{4}}$$

<u>$(x,y) = (\frac{15}{4}, \frac{25}{4})$ er punktene som gir maksimum eller minimum.</u>

(Velger å ikke finne ut om det er maks/min (her), ettersom det blir spurt om i oppg. c)

c) $f(2,8) = 2 \cdot 2^2 + 8^2 - 2 \cdot 8$

$$= 8 + 64 - 16 = \underline{56}$$

$$f(5,5) = 2 \cdot 5^2 + 5^2 - 5 \cdot 5$$

$$= 50 + 25 - 25 = \underline{50}$$

$$f(\tfrac{15}{4}, \tfrac{25}{4}) = 2 \cdot (\tfrac{15}{4})^2 + (\tfrac{25}{4})^2 - (\tfrac{15}{4} \cdot \tfrac{25}{4}) \approx 43{,}75$$

Ser at:
- $2 < x = \frac{15}{4} < 5$
- $8 > x = \frac{25}{4} > 5$
- $f(\frac{15}{4}, \frac{25}{4})$ mindre enn både $f(2,8)$ og $f(5,5)$

Ettersom verdien $(x,y)=(\frac{15}{4},\frac{25}{4})$ ligger mellom $f(x,y)=(2,8)$ og $(x,y)=(5,5)$ for både x og y, og verdiene til disse punktene er større enn verdien til $f(\frac{15}{4},\frac{25}{4})$, antar jeg at $(x,y)=(\frac{15}{4},\frac{25}{4})$ er et minimumspunkt.

$f(x,y)$ er en kontinuerlig funksjon under en begrensning $(x+y=10)$. Da underbygger ekstrem-verdisetningen påstanden om at det finnes maks. eller min. punkter for $f(x,y)$.
Ettersom det er en kontinuerlig funksjon kan jeg se på verdien (hvor z er i planet) for å finne ut om punktet jeg har funnet er maks. eller min punkt innenfor ~~et~~ intervall.