ECONnect
NTNU

Faktor

- en eksamensavis utgitt av ECONnect

Eksamensbesvarelse:
SØK1001 – Innføring i matematikk for økonomer

Eksamen:	Høsten 2009
Antall sider:	14

Om ECONnect:

ECONnect er en frivillig studentorganisasjon for studentene på samfunnsøkonomi- og finansøkonomistudiet ved NTNU. Vi arbeider for økt faglig kompetanse blant våre studenter samt tettere kontakt med næringslivet. Det gjør vi ved å arrangere fagdager, gjesteforelesninger, bedriftspresentasjoner m.m. I dag går det ca. 200 studenter på bachelornivå (1.-3. klasse) og ca. 70 studenter på masternivå (4.-5. klasse). Studentene på masternivå er fordelt på de to linjene samfunnsøkonomi (ca. 50 stk) og finansiell økonomi (ca. 20 stk). Mer om ECONnect og aktuelle arrangementer på www.econnect-ntnu.no.

ECONnect består av følgende personer ved utgivelsestidspunkt:

Bjørn Bergholt (Leder)	bjorn@econnect-ntnu.no
Sophie S. Strømman (Bedriftsansvarlig)	sophie@econnect-ntnu.no
Maiken Weidle (Fagdagsansvarlig)	maiken@econnect-ntnu.no
Joakim Bjørkhaug (Økonomi- og IT-ansvarlig)	joakim@econnect-ntnu.no
Elise Caspersen	elise@econnect-ntnu.no
Tiril Toftedahl	tiril@econnect-ntnu.no
Louis Dieffenthaler	louis@econnect-ntnu.no
Andreas H. Jung	andreas@econnect-ntnu.no
Mari Benedikte Ellingsen	mari@econnect-ntnu.no
Herman Westrum Thorsen	herman@econnect-ntnu.no

Post- og besøksadresse:	*Organisasjonsnummer:*	*Hjemmeside:*
ECONnect, NTNU Dragvoll Institutt for samfunnsøkonomi Bygg 7, Nivå 5 7491 Trondheim	NO 994 625 314	www.econnect-ntnu.no

Merk: Eksamensbesvarelsene har i varierende grad feil og mangler, både oppsett og innhold. De vil også kunne vise en av flere mulige fremgangsmåter. ECONnect står ikke ansvarlig for selve faginnholdet.

NTNU

Kandidatnr. 10063

Dato: 4/12/09 Side: 1

Fagnr/emnekode SØK 1001 Antall ark: 14

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

Oppgave 1

a) $f(x) = x^2$ oppgitt punktet $(2,4)$

Tangent likningen i punktet $(2,4)$ gitt ved

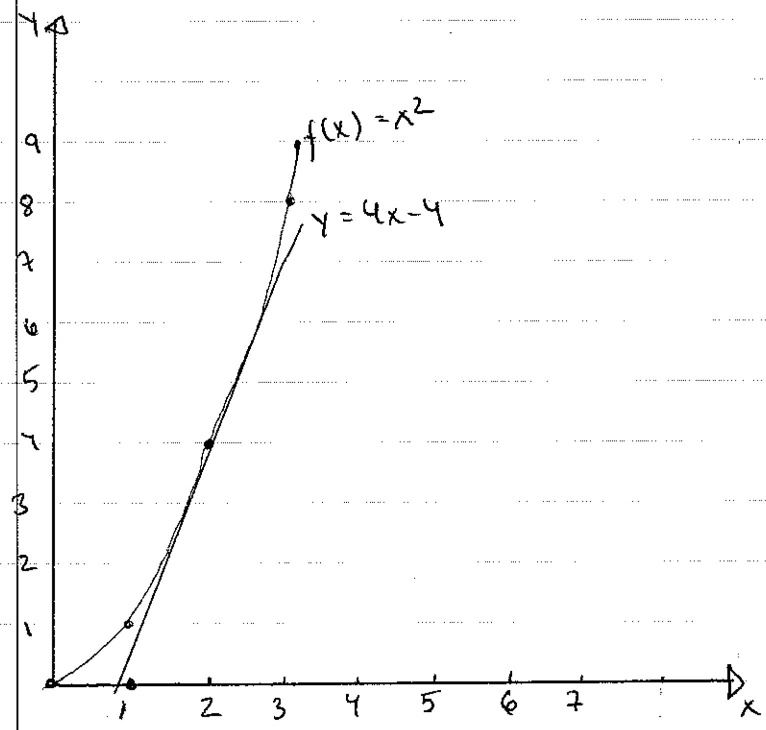
$$y - f(2) = f'(2)(x-2)$$

$$y - 4 = 4(x-2)$$

$$y = 4x - 8 + 4$$

$$\underline{\underline{y = 4x - 4}}$$

Grafen og tangenten til $f(x) = x^2$ i $(2,4)$



$f(x)$	1	4	9
x	1	2	3

y	0	4	8
x	1	2	3

b) $g(x) = \frac{1}{x}$ oppgitt punktet $(2, \frac{1}{2})$

Tangentlikningen i punktet gitt ved

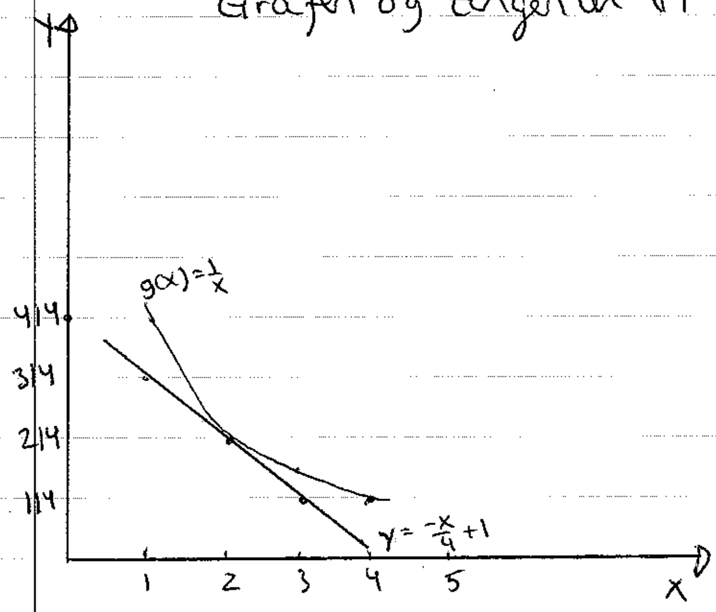
$$y - g(2) = f'(2)(x - 2)$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

$$y = -\frac{x}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{y = -\frac{x}{4} + 1}}$$

Grafen og tangenten til $g(x) = \frac{1}{x}$ i $(2, \frac{1}{2})$



g(x)	/	1	1/2	1/3	1/4
x	0	1	2	3	4

y	1	3/4	1/2	1/4
x	0	1	2	3

NTNU

Kandidatnr. 10063

Dato: 4/12/09 Side: 3

Fagnr/emnekode SØK 1001

Antall ark: 14

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

Oppgave ②

a) $f(x) = x^2 + \frac{1}{1+x^2}$

$f'(x) = u' \cdot v'$

$u' = 2x \quad v' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$$f'(x) = 2x - \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

b) $f(x) = (1+x^2)^{3/2}$

Kjerne regelen $y = ~~f(x)g(x)~~ f(g(x))$

$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$g'(x) = 2x$

$$f'(x) = \frac{3}{2}(1+x^2)^{1/2} \cdot 2x$$

$$f'(x) = 3x(1+x^2)^{1/2}$$

c) $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$

$y = \ln(g(x)) \quad y' = \frac{g'(x)}{g(x)}$

$g'(x) = 2x - 2$

$$f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+2}$$

d) $f(x) = e^x 3^x$

Multiplikasjonsregelen for derivasjon

$y = u \cdot v \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$u' = e^x \quad v' = 3^x \ln 3$

$$f'(x) = e^x 3^x + e^x 3^x \ln 3$$

$$f'(x) = e^x 3^x (1 + \ln 3) = 2{,}09 e^x 3^x$$

Tapir Uttrykk 04/09

e) $f(x) = (2x)^x$ $\quad y = (f(x))^{g(x)} \quad y' = (f(x))^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$

$f'(x) = (2x)^x \left(1 \ln(2x) + \cancel{x}\left(\frac{2}{2x}\right)\right)$

$f'(x) = \underline{\underline{(2x)^x(\ln(2x)+1)}}$

f) $f(x) = 2^x x^x$ $\quad$ multiplikasjonsregel for derivasjon

$y = u \cdot v \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$u' = 2^x \ln 2$

$v' = x^x(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1)$

$f'(x) = 2^x \ln 2 \cdot x^x + 2^x \cdot (x^x(\ln x + 1))$

$f'(x) = \underline{\underline{2^x x^x(\ln 2 + (\ln x + 1))}}$

Oppgave 3

$f(x) = \frac{4x}{x^2+1} \qquad -4 \leq x \leq 4$

a) Nullpunkter er der $f(x) = 0$

$$\frac{4x}{x^2+1} = 0$$

Fordi $f(x)$ er en brøk må telleren være lik 0 for at $f(x) = 0$, altså må

$$4x = 0$$
$$x = 0$$

$\underline{\underline{\text{Nullpunkt for } (0,0) \text{ for } f(x)}}$

NTNU

Kandidatnr. 10063

Dato: 4/12/09 Side: 5

Fagnr/emnekode SØK 1001 Antall ark: 14

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

b) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$

Brøkregelen for derivasjon

$y = \dfrac{u}{v} \quad y' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Førstederiverte =

$u = 4x \qquad u' = 4$

$v = x^2+1 \qquad v' = 2x$

$$f'(x) = \frac{4(x^2+1) - 4x(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2+4-8x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4-4x^2}{(x^2+1)^2} = f'(x)\ \underline{\underline{\frac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}}}$$

Dobbeltderiverte =

$u = 4-4x^2 \qquad u' = -8x$

$v = (x^2+1)^2 \qquad v' = 2(x^2+1) \cdot 2x = 4x(x^2+1)$

$$f''(x) = \frac{\left[-8x(x^2\cancel{+1})^{\cancel{2}}\right] - \left[(4-4x^2)(4x(x^2\cancel{+1})\right]}{((x^2\cancel{+1})^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-8x(x^2+1) - (4-4x^2)(4x)}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{(-8x^3-8x) - (16x-16x^3)}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{8x^3-24x}{(x^2+1)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = \underline{\underline{\frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}}}$$

Tapir Uttrykk 04/09

c) Stasjonære punkter er punkter der den deriverte (stigningstallet til funksjonen) er lik 0.

$$f'(x) = \frac{4-4x^2}{(x^2+1)^2} = 0$$

Fordi $f'(x)$ er en brøk må telleren være $=0$ for at $f'(x)=0$, altså

$$4-4x^2=0$$

$$\frac{4x^2}{4} = \frac{4}{4}$$

$$x^2=1$$

$$x=\pm 1$$

$$f(1) = \frac{4(1)}{1^2+1} = \frac{4}{2} = 2 \qquad (1,2)$$

$$f(-1) = \frac{4(-1)}{-1^2+1} = \frac{-4}{2} = -2 \qquad (-1,-2)$$

$(1,2)$ og $(-1,-2)$ er stasjonære punkter for $f(x)$. For å klassifisere disse bruker jeg annenderivert testen.

- Om $f''(x)$ er >0 i punktet vil punktet være et lokalt bunnpunkt.
- Om $f''(x)$ er <0 i punktet vil punktet være et lokalt toppunkt.

$$f''(x) = \frac{8x^3-24x}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(1) = \frac{8(1)^3-24(1)}{(1^2+1)^3} = \frac{8-24}{8} = \frac{-16}{8} = -2$$

$-2<0$, dette gir at <u>$(1,2)$ er et lokalt toppunkt for $f(x)$</u>

$$f''(-1) = \frac{8(-1)^3 - 24(-1)}{(-1^2+1)^3} = \frac{-8+24}{2^3} = \frac{16}{8} = 2$$

$2 > 0$, dette gir at $(-1, -2)$ er et lokalt bunnpunkt for $f(x)$.

d) For å finne globale topp/bunn punkter for $f(x)$ må vi sjekke verdiene av $f(x)$ i endepunktene i det gitte intervallet $-4 \leq x \leq 4$.

$$f(-4) = \frac{4(-4)}{-4^2+1} = \frac{-16}{17}$$

$$f(4) = \frac{4 \cdot 4}{4^2+1} = \frac{16}{17}$$

$$\frac{-16}{17} > -2 \qquad \frac{16}{17} < 2$$

$(-1, -2)$ er et globalt bunn punkt for $f(x)$.
$(1, 2)$ er et globalt topp punkt for $f(x)$.

e) Vendepunktet til en funksjon er der den dobbeltderiverte er lik 0, altså der $f'(x)$ går fra å vokse til å avta, eller motsatt.

$$f''(x) = \frac{8x^3 - 24x}{(x^2+1)^3} = 0$$

$8x^3 - 24x = 0$

$8x(x^2 - 3) = 0$

enten $8x = 0$ eller $(x^2 - 3) = 0$

$x = 0$ $\qquad x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{3}$

altså 3 mulige x verdier for vendepunkt

$x = 0 \quad x = \sqrt{3} \quad x = -\sqrt{3}$

$f(0) = \frac{4 \cdot 0}{0+1} = 0$

$f(\sqrt{3}) = \frac{4(\sqrt{3})}{(\sqrt{3})^2+1} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

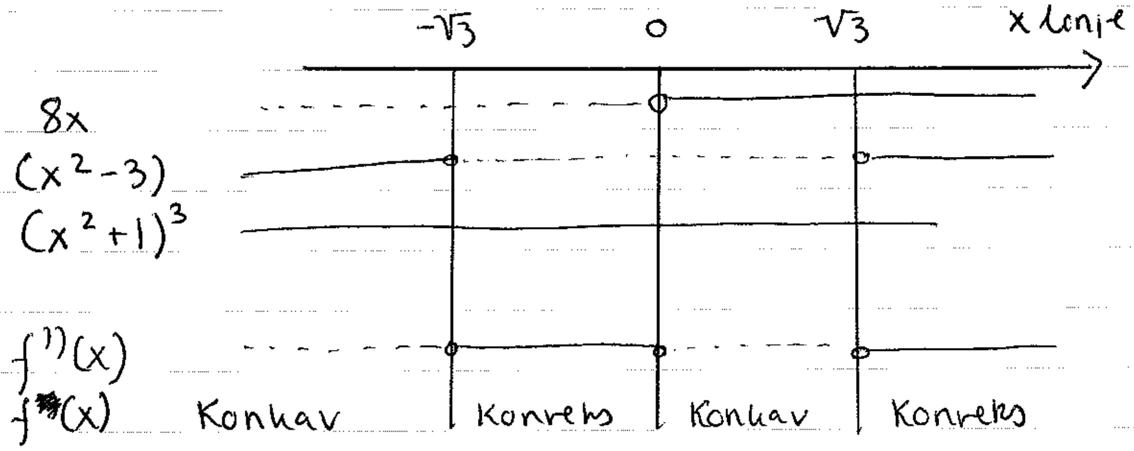
$f(-\sqrt{3}) = \frac{4(-\sqrt{3})}{(-\sqrt{3})^2+1} = \frac{-4\sqrt{3}}{-2} = 2\sqrt{3}$

Vendepunkter for $f(x)$ i:

$(0,0)$, $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ og $(-\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$

For å finne hvor $f(x)$ er konveks/konkav setter jeg opp et fortegnsskjema for $f''(x)$.

- $F''(x) \geq 0$ gir $f(x)$ Konveks
- $F''(x) \leq 0$ gir $f(x)$ Konkav



NTNU

Kandidatnr. 10063

Dato: 4/12/09 Side: 9

Fagnr/emnekode SØK 1001

Antall ark: 14

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

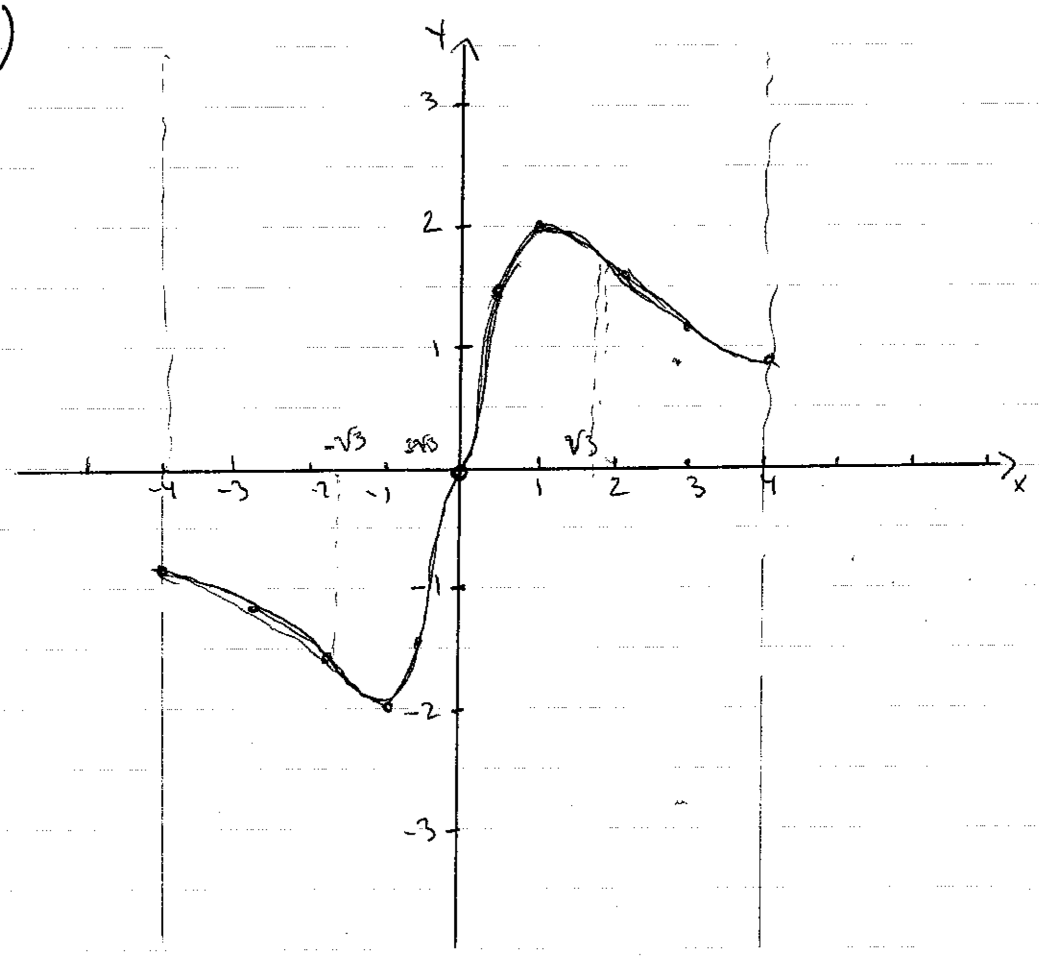
$f(x)$ er konkav for $\underline{\underline{x < -\sqrt{3}}}$

$f(x)$ er konveks for $\underline{\underline{0 > x > -\sqrt{3}}}$

$f(x)$ er konkav for $\underline{\underline{0 < x < \sqrt{3}}}$

$f(x)$ er konveks for $\underline{\underline{x > \sqrt{3}}}$

f)



Den gule kopien beholder du

Tapir Uttrykk 04/09

Oppgave 4

a)

$f(x,y) = x^3 - 3x - y^2$

a) Stasjonære punkter for $f(x,y)$ er der den deriverte både mhp. x og mhp. y $= 0$.

$f_x'(x,y) = 3x^2 - 3$ (1)

$f_y'(x,y) = -2y$ (2)

(1) $3x^2 - 3 = 0$

$3x^2 = 3$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

(2) $-2y = 0$

$y = 0$

$(1,0,z)$ og $(-1,0,z)$ er de stasjonære punktene til $f(x,y)$

$f(1,0) = 1 - 3 - 0 = -2$

$f(-1,0) = -1 - (3)(-1) - 0 = 2$

$(1,0,-2)$ og $(-1,0,2)$ er de stasjonære punktene for $f(x,y)$

NTNU

Kandidatnr. 100063

Dato: 4/12/09 Side: 11

Fagnr/emnekode SØK 1001

Antall ark: 14

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

b)

~~Starte med punktet (1, 0, -2)~~

$f_x'(x,y) = 3x^2 - 3$

$f_y'(x,y) = -2y$

$f_{xx}''(x,y) = 6x \qquad = A$

$f_{yy}''(x,y) = -2 \qquad = C$

$f_{xy}''(x,y) = f_{yx}''(x,y) = 0 \qquad = B$

Starte med punktet $(1,0,-2)$

$A = 6 \cdot 1 = 6 > 0$

$AC - B^2 = 6(-2) - 0^2 = -12 < 0$

$A > 0$ og $AC - B^2 < 0$

$(1,0,-2)$ er et sadel punkt for $f(x)$.

Så punktet $(-1,0,2)$

$A = 6 \cdot -1 = -6 < 0$

$AC - B^2 = -6(-2) - 0^2 = 12 > 0$

$A < 0$ og $AC - B^2 > 0$

$(-1,0,2)$ er et lokalt toppunkt for $f(x)$.

Oppgave 5

a) $f(x,y) = x+y$

$g(x,y) = y-(x-1)^2 = 1$

Nivåkurver for $f(x,y)$:

$f(x,y) = 10 \qquad 10 = x+y \Rightarrow y = 10-x$

$f(x,y) = 5 \qquad 5 = x+y \Rightarrow y = 5-x$

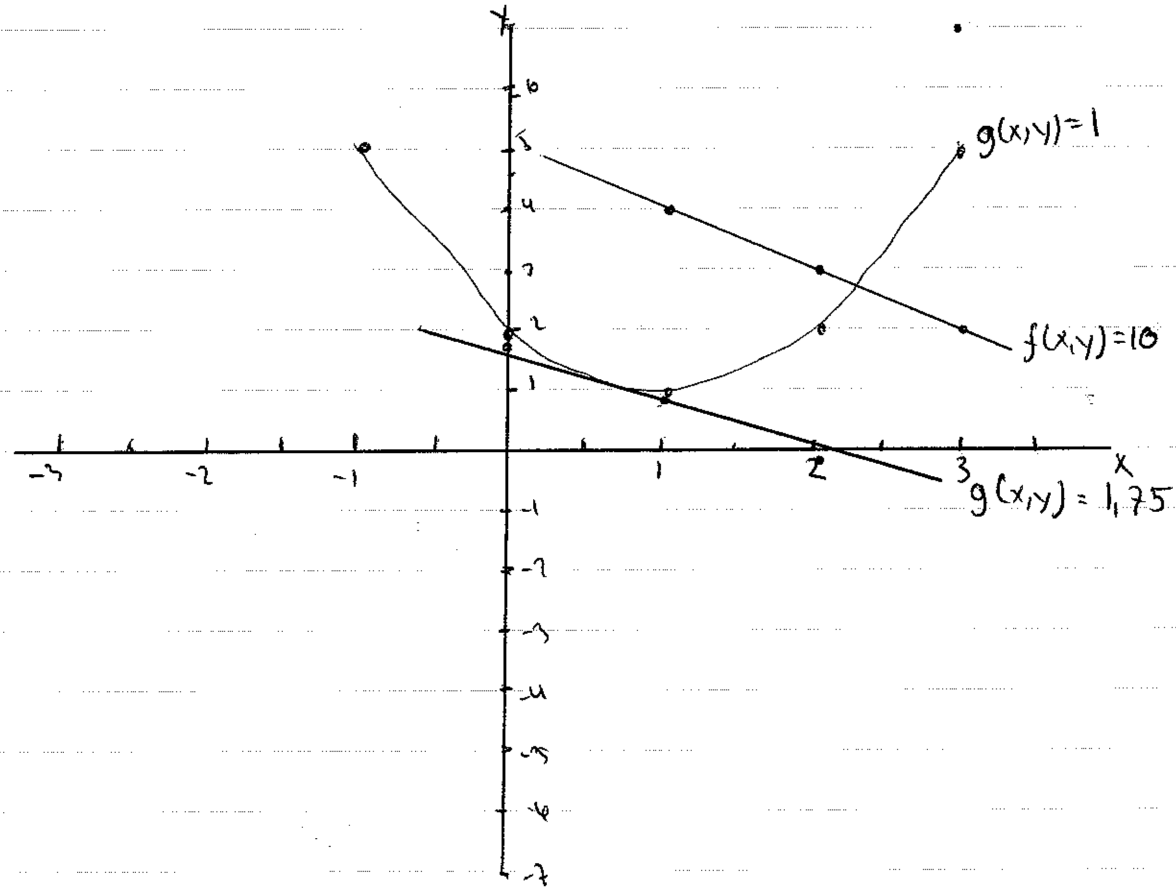
$f(x,y) = 1{,}75 \qquad 1{,}75 = x+y \Rightarrow y = 1{,}75-x$

Bibet. $g(x,y) = y-(x-1)^2 = 1$

$y = 1+(x-1)^2$

$y = x^2-2x+2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	17	10	5	2	1	2	5



b) $f(x,y) = x + y$

$g(x,y) = y - (x-1)^2 = 1$

~~$\mathcal{L}(x,y) = x + y - \lambda(x^2 - 2x + 2 - y)$~~

~~$\mathcal{L}_x'(x,y) = 1 - 2\lambda x$~~

$\mathcal{L}(x,y) = x + y - \lambda(y - x^2 + 2x - 2)$

$\mathcal{L}_x'(x,y) = 1 + 2\lambda x - 2\lambda = 0$ (1) $g(x,y) = y - (x-1)^2 - 1 = 0$ (3)

$\mathcal{L}_y'(x,y) = 1 - \lambda = 0$ (2)

(2) gir $\lambda = 1$

Sette (2) inn i (1) for å finne x verdien

$(1) = 1 + 2(1)x - 2(1) = 0$

$1 + 2x - 2 = 0$

$\frac{2x}{2} = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}$

Sette inn i (3) for å finne y verdien

$(3) = y - (\frac{1}{2} - 1)^2 - 1 = 0$

$y - \frac{1}{4} - 1 = 0$

$y = 1 + \frac{1}{4}$

$y = \frac{5}{4}$

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

max / min for $f(x,y)$ under bibetingelsen $g(x,y)$ er når $x = \frac{1}{2}$ $y = \frac{5}{4}$

$f(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}) = \frac{7}{4} = 1{,}75$

c) ~~Ved å se på skissen ia ser vi at nivåkurven $g(x,y) = 1{,}75$ vil treffe $g(x,y)$ når $g(x,y)$ er konveks, det vil si at vi har et maksimumspunkt minimumspunkt maksimums for $f(x,y)$ under bibetingelsen, fordi vi ser at denne nivåkurven for $g(x,y)$ er den kurven med høyest verdi som $g(x,y)$ vil tangere.~~

Skissen i a viser altså at det høyeste nivået $f(x,y)$ vil anta under bibetingelsen er 1,75. Fordi vi ser at denne nivåkurven for $f(x,y)$ er den kurven med høyest verdi som $(g(x,y))$ vil tangere. Vi har altså funnet et maksimumspunkt for $f(x)$.