ECONnect NTNU

Faktor

- en eksamensavis utgitt av ECONnect

Eksamensbesvarelse:

SØK1001 – Innføring i matematikk for økonomer

Eksamen:	Høst 2010
Antall sider:	11

Om ECONnect:

ECONnect er en frivillig studentorganisasjon for studentene på samfunnsøkonomi- og finansøkonomistudiet ved NTNU. Vi arbeider for økt faglig kompetanse blant våre studenter samt tettere kontakt med næringslivet. Det gjør vi ved å arrangere fagdager, gjesteforelesninger, bedriftspresentasjoner m.m. I dag går det ca. 200 studenter på bachelornivå (1.-3. klasse) og ca. 70 studenter på masternivå (4.-5. klasse). Studentene på masternivå er fordelt på de to linjene samfunnsøkonomi (ca. 50 stk) og finansiell økonomi (ca. 20 stk). Mer om ECONnect og aktuelle arrangementer på www.econnect-ntnu.no.

ECONnect består av følgende personer ved utgivelsestidspunkt:

Ole Christian Grytten(Leder)	ole@econnect-ntnu.no
Tone Hedvig Berg (Bedriftsansvarlig)	tone@econnect-ntnu.no
Elise Caspersen (Fagdagsansvarlig)	elise@econnect-ntnu.no
Tiril Toftdahl (Faktoransvarlig)	tiril@econnect-ntnu.no
Daniel Johansson	daniel@econnect-ntnu.no
Georg Næsheim	georg@econnect-ntnu.no
Mariell Toven	mariell@econnect-ntnu.no
Ellen Normann	ellen@econnect-ntnu.no
Ragnhild Grøv	ragnhild@econnect-ntnu.no
Johan Berg Fossen	johan@econnect-ntnu.no
Martine Ødegård	martine@econnect-ntnu.no
Inga Friis	inga@econnect-ntnu.no
Caroline Lesiewicz	caroline@econnect-ntnu.no

Post- og besøksadresse:	*Organisasjonsnummer:*	*Hjemmeside:*
ECONnect, NTNU Dragvoll Institutt for samfunnsøkonomi Bygg 7, Nivå 5 7491 Trondheim	NO 994 625 314	www.econnect-ntnu.no

Merk: Eksamensbesvarelsene har i varierende grad feil og mangler, både oppsett og innhold. De vil også kun vise en av flere mulige fremgangsmåter. ECONnect står ikke ansvarlig for selve faginnholdet.

Merk at økonomisk tolkning av resultatene i oppgave 2b og kommentar i oppgave 5c er noe knapp i fasiten. En A besvarelse bør ha mer utfyllende kommentarer.

Oppg. 1

a) $f(x) = e^{2x}(x^2-1)$

$f'(x) = 2e^{2x}(x^2-1) + e^{2x} \cdot 2x$

$= \underline{2e^{2x}(x^2-1+x)}$

b) $f(x) = \left(\frac{3x+2}{x^2+1}\right)^{1/4}$

$u = \frac{3x+2}{x^2+1}$

$\frac{du}{dx} = \frac{3(x^2+1) - 2x(3x+2)}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{3x^2+3-6x^2-4x}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{-3x^2-4x+3}{(x^2+1)^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}u^{-3/4} \cdot \frac{du}{dx}$

$= \underline{\frac{1}{4}\left(\frac{3x+2}{x^2+1}\right)^{-3/4} \cdot \frac{-3x^2-4x+3}{(x^2+1)^2}}$

c) $f(x) = \ln(2-3x)$

$D_f: \ 2-3x > 0 \ \Rightarrow \ 3x < 2 \ \Rightarrow \ \underline{x < \frac{2}{3}}.$

$$f'(x) = \frac{1}{2-3x} \cdot (-3) = \underline{-\frac{3}{2-3x}}$$

d) $f(x) = 3x^4$

$$El_x f(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$$

$$= 12x^3 \cdot \frac{x}{3x^4}$$

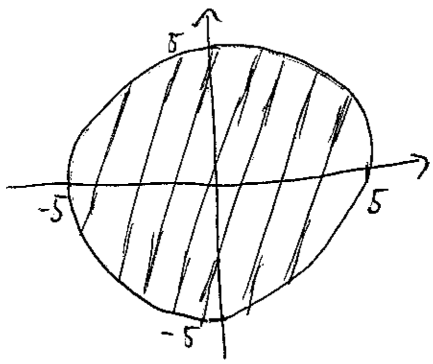
$$\underline{= 4}$$

Når x øker med 1%, øker f(x) med 4%.

e) $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

$D_f: \ 25 - x^2 - y^2 \geq 0 \ \Rightarrow \ x^2 + y^2 \leq 25$

$x^2 + y^2 = 25$: Sirkel med radius lik 5.



Oppg. 2

a)

i) $4x^3 - 5x^2 + 8x - 1 : x-2 = \underline{4x^2 + 3x + 14 + \frac{27}{x-2}}$

$$\underline{-(4x^3 - 8x^2)}$$

$$3x^2 + 8x - 1$$

$$\underline{-(3x^2 - 6x)}$$

$$14x - 1$$

$$\underline{-(14x - 28)}$$

$$27$$

ii) $5x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 5 : x+1 = \underline{5x^3 - 9x^2 + 7x - 7 + \frac{12}{x+1}}$

$$\underline{-(5x^4 + 5x^3)}$$

$$-9x^3 - 2x^2 + 5$$

$$\underline{-(-9x^3 - 9x^2)}$$

$$7x^2 + 5$$

$$\underline{-(7x^2 + 7x)}$$

$$-7x + 5$$

$$\underline{-(-7x - 7)}$$

$$12$$

b) $Y = K^{0,4} L^{0,5}$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = 0,4\,K^{-0,6} L^{0,5} > 0$$ Økt K gir økt Y

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = 0,5\,K^{0,4} L^{-0,5} > 0$$ Økt L gir økt Y

Dvs positive grenseproduktiviteter.

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = -0,4 \cdot 0,6\,K^{-1,6} L^{0,5}$$
$$= -0,24\,K^{-1,6} L^{0,5} < 0$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = -0,5 \cdot 0,5\,K^{0,4} \cdot L^{-1,5}$$
$$= -0,25\,K^{0,4} L^{-1,5} < 0$$

Avtagende grenseproduktiviteter: $L \uparrow \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial L} \downarrow$

$K \uparrow \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial K} \downarrow$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K \partial L} = 0,4 \cdot 0,5\,K^{-0,6} L^{-0,5}$$
$$= 0,2\,K^{-0,6} L^{-0,5} > 0$$

K og L er komplementær

$K \uparrow \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial L} \uparrow$ og $L \uparrow \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial K} \uparrow$.

Oppg. 3

a) $P(t) = 4 \cdot 1,018^t$

b) $P(t) = 7 \Rightarrow 4 \cdot 1,018^t = 7$

$$1,018^t = 1,75$$

$$\ln 1,018^t = \ln 1,75$$

$$t \cdot \ln 1,018 = \ln 1,75$$

$$t = \frac{\ln 1,75}{\ln 1,018}$$

$$t = 31,37$$

Det tar i overkant av 31 år.

c) $P(t) = 4 \cdot 1,03^t$

$P(t) = 4 \cdot 1,007^t$

$P(t) = 4 \cdot 0,988^t$

Oppg. 4

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 4x + \frac{1}{3}$$

a) $f'(x) = 2x^2 - 9x + 4$

$f'(x) = 0$ gir

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{9 \pm 7}{4}$$

$\Rightarrow \underline{x_1 = 4}$ og $\underline{x_2 = \frac{1}{2}}$

$$f(4) = \frac{2}{3} \cdot 4^3 - \frac{9}{2} \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{128}{3} - 72 + 16 + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{129}{3} - 56 = \underline{-13}$$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{9}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

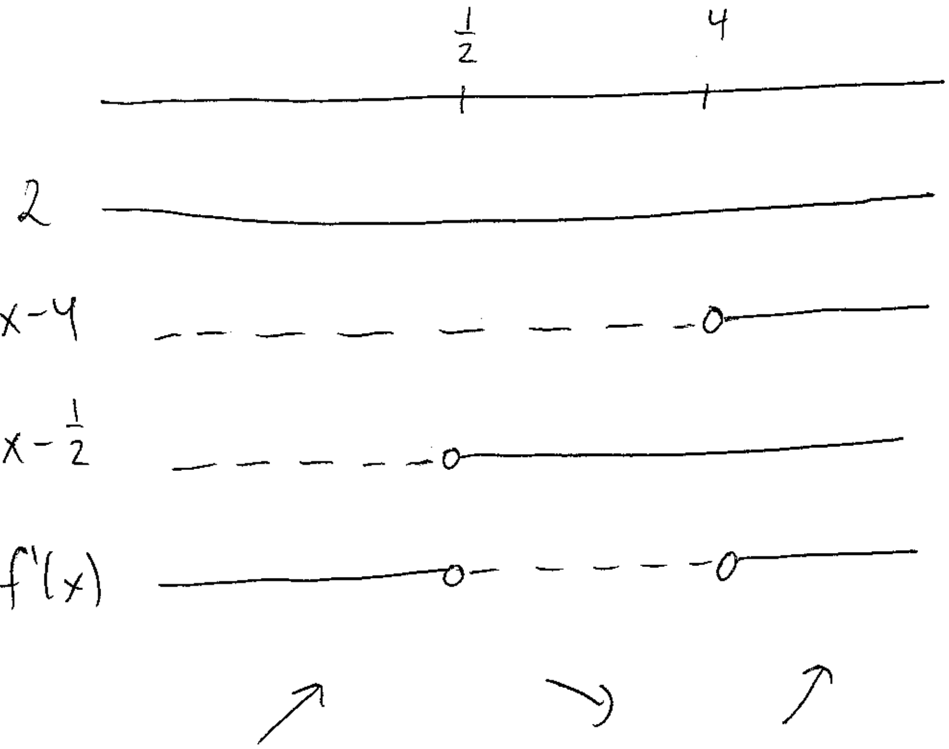
$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} - \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{4} + 2 + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{9}{8} + 2 + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{24} - \frac{27}{24} + \frac{48}{24} + \frac{8}{24} = \underline{\underline{\frac{31}{24}}}$$

To stasjonære punkt: $(x,y) = (4,-13)$ og $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{31}{24}\right)$.

b) $f'(x) = 2(x-4)\left(x-\frac{1}{2}\right)$



$x = \frac{1}{2}$ lokalt max

$x = 4$ lokalt min

c) $f''(x) = 4x - 9$

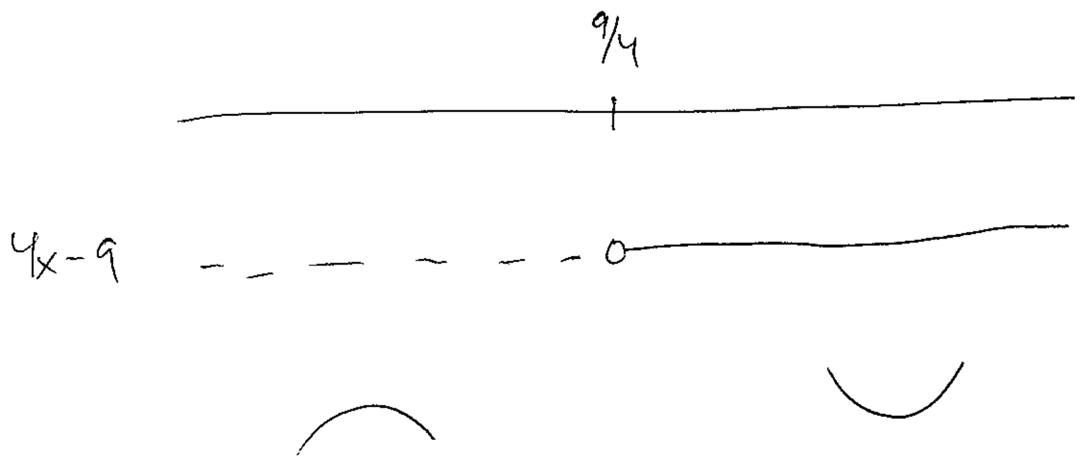
$f''(\frac{1}{2}) = 4 \cdot \frac{1}{2} - 9 = -7 < 0$: Lokalt max

$f''(4) = 4 \cdot 4 - 9 = 7 > 0$: Lokalt min

d) $f''(x) = 0 \Rightarrow 4x - 9 = 0$

$$4x = 9$$

$$\underline{x = \frac{9}{4}}$$



$x = \frac{9}{4}$ er vendepunkt ($f''(\frac{9}{4}) = 0$ og f'' skifter fortegn)

Funksjonens bratteste punkt, går fra å være konkav til å bli konveks.

Oppg. 5

a) Max/min $f(x,y) = -x^2 + 4x + 2y$

gitt $x + y = m$

$$\mathcal{L} = -x^2 + 4x + 2y - \lambda(x + y - m)$$

FOBs:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow -2x + 4 - \lambda = 0 \quad (i)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2 - \lambda = 0 \quad (ii)$$

$$x + y = m \quad (iii)$$

(ii) $\underline{\lambda = 2}$ $\Rightarrow$ (i) $-2x + 4 = 2$

$\Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow \underline{x = 1}$

$\Rightarrow \underline{y = m - 1}$

b) $m = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 1$ og $y = \frac{3}{2} \Rightarrow f(x,y) = -1 + 4 + 2 \cdot \frac{3}{2} = 6$

$$f(x,y) = 2 \Rightarrow -x^2 + 4x + 2y = 2$$

$$\Rightarrow 2y = x^2 - 4x + 2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

$y' = x - 2 \Rightarrow y' = 0$ for $x = 2$

$y'' = 1 > 0 \rightarrow$ Bunnpunkt.

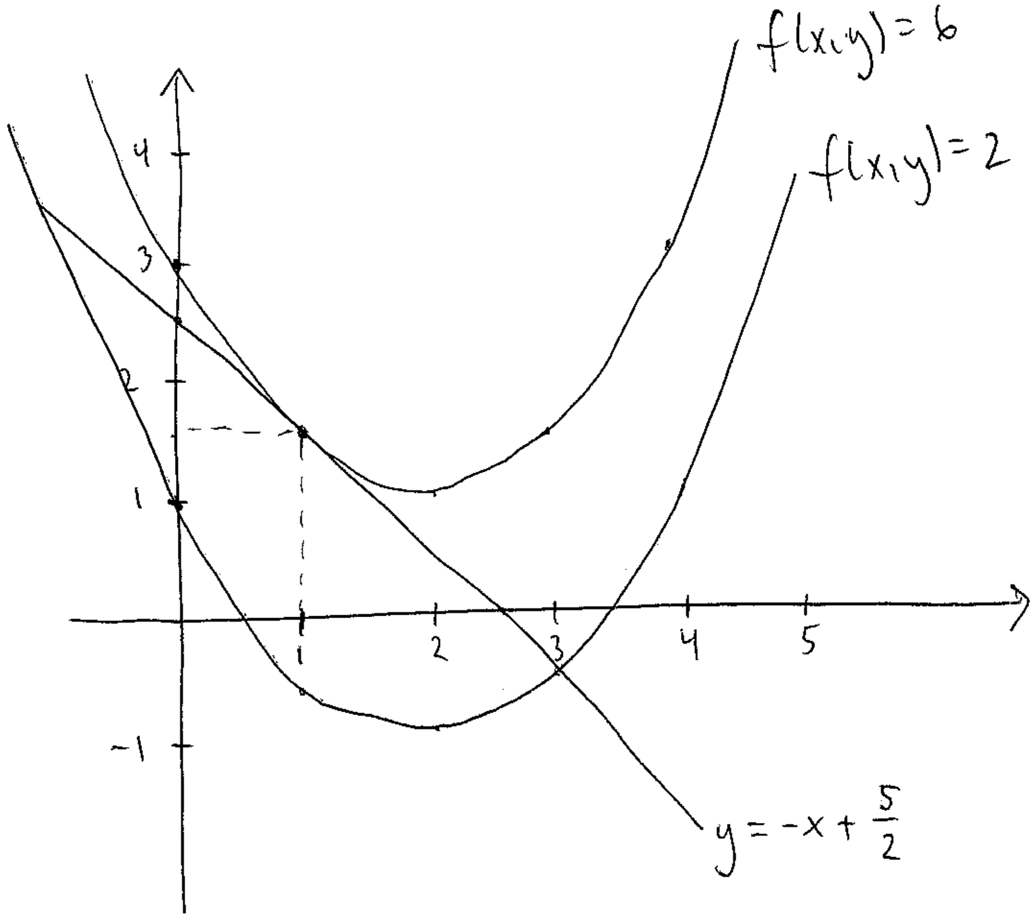
x	0	1	2	3	4
y	1	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1

$$f(x,y) = 6 \Rightarrow -x^2 + 4x + 2y = 6$$

$$\Rightarrow 2y = x^2 - 4x + 6$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$$

x	0	1	2	3	4
y	3	$3/2$	1	$3/2$	3



Ser at $(x,y) = (1, \frac{3}{2})$ er et max punkt.

c) $x^* = 1$

$y^* = m - 1$

$$\Rightarrow f^*(m) = -(x^*)^2 + 4x^* + 2y^*$$

$$= -1 + 4 + 2(m-1)$$

$$= 3 + 2m - 2$$

$$= \underline{2m + 1} \qquad (\text{Ser at } m = \tfrac{5}{2} \text{ gir } f^* = 6)$$

$\frac{df^*}{dm} = 2$ Når beskrankningen m øker med én enhet, øker max-verdien til f med 2 enheter. Linja for bibet. skifter oppover i diagrammet.