FASIT SØK1001 HØST 2014

Oppg. 1

a)

i) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$

$$f'(x) = 12x^2 - 6x$$

ii) $f(x) = \dfrac{x^3 + 5}{5x^2 - x}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(5x^2 - x) - (x^3 + 5)(10x - 1)}{(5x^2 - x)^2}$$

$$= \frac{15x^4 - 3x^3 - (10x^4 - x^3 + 50x - 5)}{(5x^2 - x)^2}$$

$$= \frac{15x^4 - 3x^3 - 10x^4 + x^3 - 50x + 5}{(5x^2 - x)^2}$$

$$= \frac{5x^4 - 2x^3 - 50x + 5}{(5x^2 - x)^2}$$

iii) $f(x) = (2x^2 - e^{3x} + 1)^7$

$f'(x) = \underline{\underline{7(2x^2 - e^{3x} + 1)^6 \cdot (4x - 3e^{3x})}}$

iv) $f(x) = 2e^{-x} + \ln x^3$

$f'(x) = -2e^{-x} + \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2$

$= \underline{\underline{-2e^{-x} + \frac{3}{x}}}$

b) i) $P(t) = 5 \cdot 1{,}012^t$

ii) $P(t) = 10 \Rightarrow 5 \cdot 1{,}012^t = 10$

$1{,}012^t = 2$

$\ln 1{,}012^t = \ln 2$

$t \cdot \ln 1{,}012 = \ln 2$

$t = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}012}$

$= \underline{\underline{58{,}1}}$

Det tar ca 58 år.

iii) $P(t) = 5 \cdot 1{,}0225^t$

$P(t) = 5 \cdot 1{,}007^t$

$P(t) = 5 \cdot 0{,}99^t$

Oppg. 2

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f''(x) = 6x - 6$

b) $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$

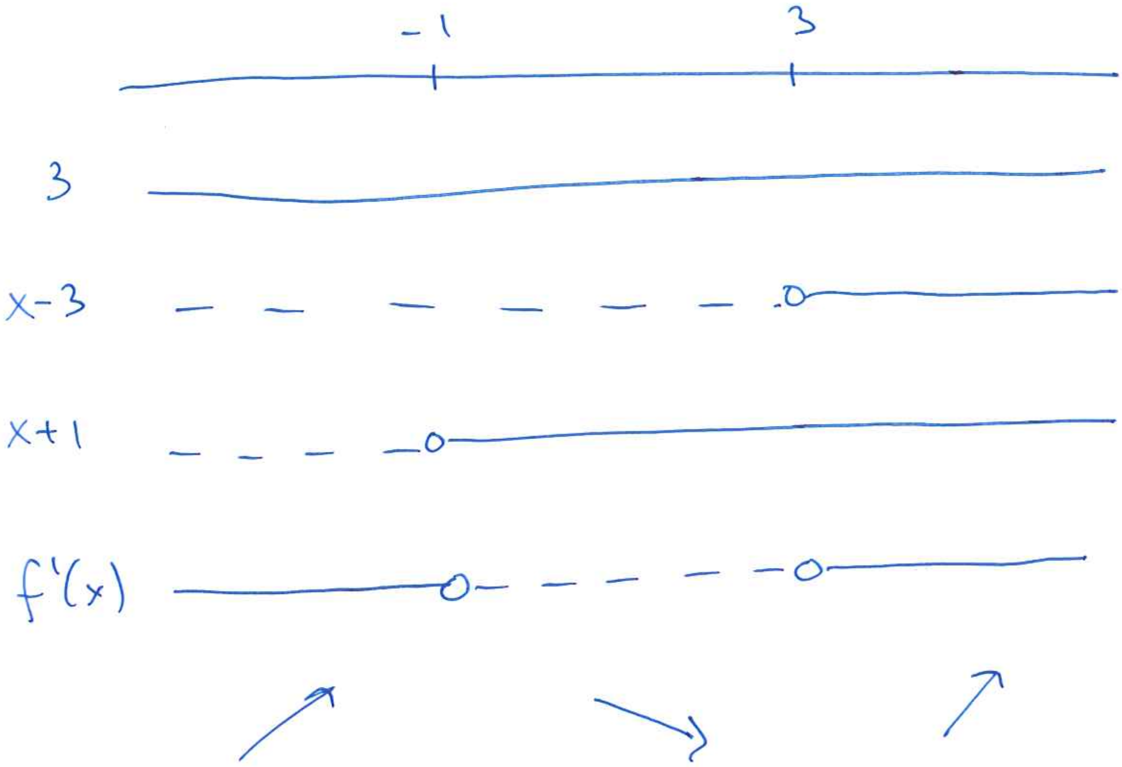
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 3 \cdot (-9)}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{6 \pm 12}{6}$$

$\Rightarrow x = 3$ ✓ $x = -1$

Stasjonære punkt: $(x, y) = (3, -7)$ og $(x, y) = (-1, 25)$

$f'(x) = 3(x-3)(x+1)$

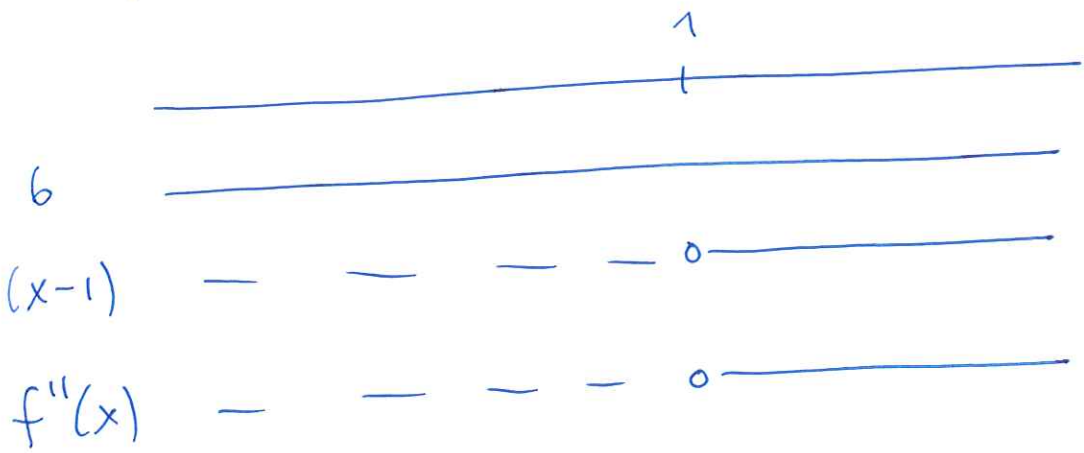


$(x,y) = (-1, 25)$ er lokalt max punkt

$(x,y) = (3, -7)$ er lokalt min punkt

c) $f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow \underline{x = 1}$



Vendepunkt : $(x,y) = (1, 9)$

d) $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$

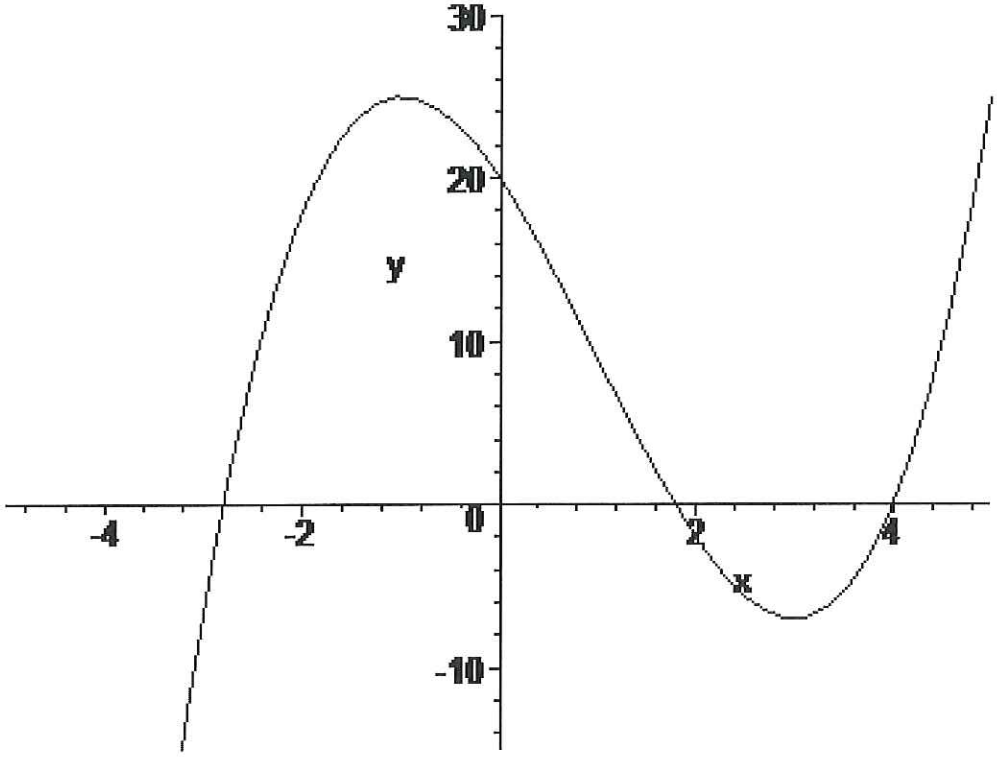
$(x_1, y_1) = (2, -2)$

$f'(x_1) = f'(2) = -9$

$\Rightarrow y + 2 = -9(x - 2)$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = -9x + 16}}$

e)



Oppg. 3

$x^2 - xy + 2y^2 = 14$

a) Skjæring med x-aksen:

$y = 0 \Rightarrow x^2 = 14 \Rightarrow x = \pm\sqrt{14} \approx \pm 3{,}7$

$(-\sqrt{14}, 0)$ og $(\sqrt{14}, 0)$

Skjæring med y-aksen:

$x = 0 \Rightarrow 2y^2 = 14 \Rightarrow y^2 = 7 \Rightarrow y = \pm\sqrt{7} \approx \pm 2{,}6$

$(0, -\sqrt{7})$ og $(0, \sqrt{7})$

b) Implisitt derivasjon gir:

$2x - (y + xy') + 4yy' = 0$

$2x - y - xy' + 4yy' = 0$

$(4y - x)y' = -(2x - y)$

$$\underline{\underline{y' = -\frac{2x - y}{4y - x}}}$$

c) Tar utgangspunkt i uttrykket

$$2x - y - xy' + 4yy' = 0$$

Deriverer mhp x:

$$2 - y' - (y' + xy'') + 4y'y' + 4yy'' = 0$$

$$2 - y' - y' - xy'' + 4y'y' + 4yy'' = 0$$

$$(4y - x)y'' = -(2 - 2y' + 4y'y')$$

$$\underline{\underline{y'' = -\frac{2 - 2y' + 4y'y'}{4y - x}}}$$

d) Horisontal tangent: $y' = 0 \Rightarrow 2x - y = 0$

$\Rightarrow y = 2x$

Inn i: $x^2 - xy + 2y^2 = 14$

$\Rightarrow x^2 - x \cdot 2x + 2(2x)^2 = 14$

$\Rightarrow x^2 - 2x^2 + 8x^2 = 14$

$\Rightarrow 7x^2 = 14 \quad \Rightarrow x^2 = 2 \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}4$

Horisontal tangent i punkta

$(x,y) = (-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ og $(x,y) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

$$y'' = -\frac{2 - 2y' + 4y'y'}{4y - x}$$

I punktet $(x,y) = (-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$:

$$y'' = -\frac{2 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \cdot 0}{4 \cdot (-2\sqrt{2}) - (-\sqrt{2})}$$

$$= -\frac{2}{-8\sqrt{2} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{2}(1-8)} = \frac{-\sqrt{2}}{-7} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{7}}} \approx 0{,}2$$

$y'' > 0$, dvs konveks kurve i dette punktet.

I punktet $(x,y) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$:

$$y'' = -\frac{2}{4 \cdot 2\sqrt{2} - \sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}(8-1)} = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{2}}{7}}} \approx -0{,}2$$

$y'' < 0$, dvs konkav kurve i dette punktet.

e) Vertikal tangent:

$y' \to \infty \Rightarrow 4y - x = 0 \Rightarrow x = 4y$

Inn i: $x^2 - xy + 2y^2 = 14$

$\Rightarrow 16y^2 - 4y^2 + 2y^2 = 14$

$\Rightarrow 14y^2 = 14$

$\Rightarrow y^2 = 1$

$\Rightarrow y = \pm 1 \quad \Rightarrow x = \pm 4$

Vertikal tangent i punkta

$(x, y) = (-4, -1)$ og $(x, y) = (4, 1)$

Oppg. 4

$$f(x,y) = 6x^2 - 6xy + \frac{1}{3}y^3 - 10y$$

Stasjonære punkt:

$f_1'(x,y) = 0 \Rightarrow 12x - 6y = 0$ (i)

$f_2'(x,y) = 0 \Rightarrow -6x + y^2 - 10 = 0$ (ii)

(i) gir $12x = 6y \Rightarrow x = \frac{1}{2}y$ inn i (ii):

(ii) $-6 \cdot \frac{1}{2}y + y^2 - 10 = 0$

$\Rightarrow y^2 - 3y - 10 = 0$

$\Rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2} \Rightarrow y = \frac{3 \pm 7}{2} \Rightarrow y = 5 \vee y = -2$

To stasjonære punkt:

$(x,y) = \left(\frac{5}{2}, 5\right)$ og $(x,y) = (-1, -2)$

Klassifisering:

$f''_{11}(x,y) = 12 \quad = A$

$f''_{12}(x,y) = -6 \quad = B$

$f''_{22}(x,y) = 2y \quad = C$

(x,y)	A	B	C	$AC-B^2$	Type punkt
$(5/2, 5)$	12	-6	10	84	Lokalt min
$(-1,-2)$	12	-6	-4	-84	Sadelpunkt

Oppg. 5

a) $f(x,y) = 5 \Rightarrow x+y = 5 \Rightarrow y = -x+5$

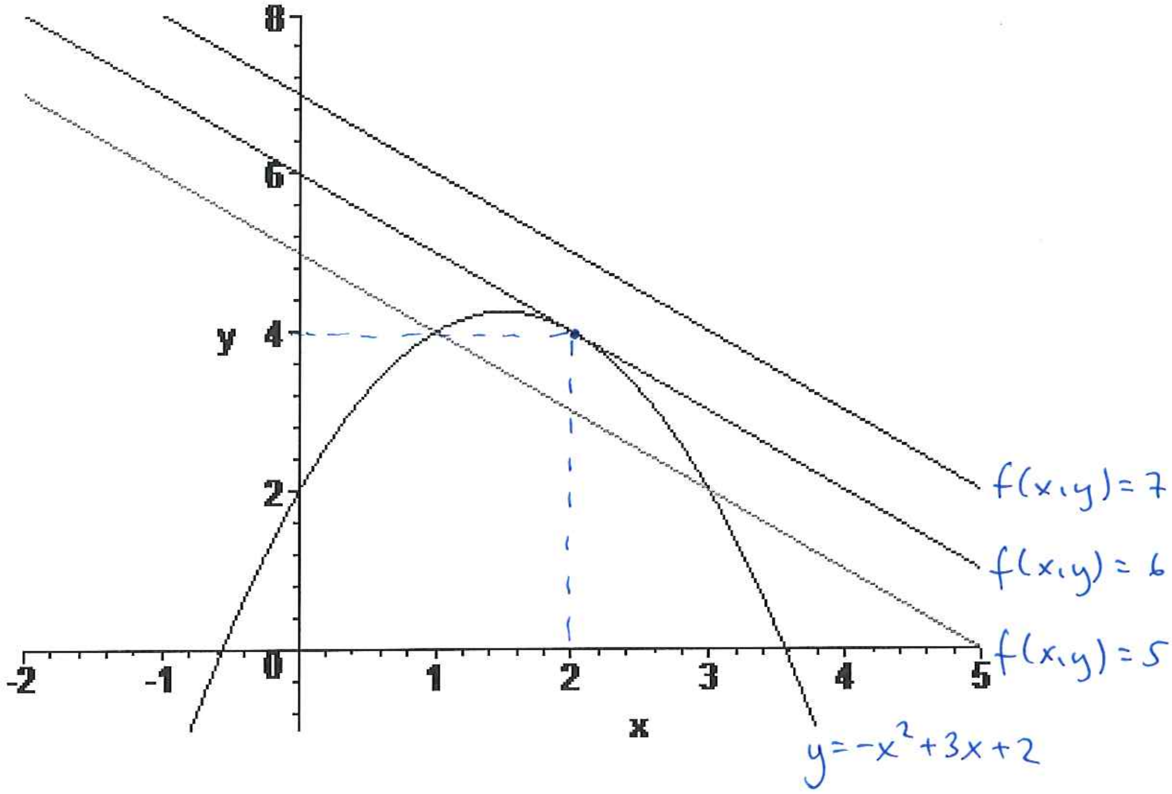
$f(x,y) = 6 \Rightarrow x+y = 6 \Rightarrow y = -x+6$

$f(x,y) = 7 \Rightarrow x+y = 7 \Rightarrow y = -x+7$

Dvs: Rette linjer med stigningstall lik -1 og skjæring med 2.aksen for hhv $y=5$, $y=6$ og $y=7$.

$y + x^2 - 3x = 2 \Rightarrow y = -x^2 + 3x + 2$

Konkav 2.gradsfunksjon med toppunkt for $x = \frac{3}{2}$ og skjæring med 1.aksen for $x = -0{,}55$ og $x = 3{,}55$



b) Max/min $f(x,y) = x+y$

gitt $y + x^2 - 3x = 2$

Lagrangefunksjonen:

$$\mathcal{L}(x,y) = x + y - \lambda(y + x^2 - 3x - 2)$$

Førsteordensbetingelser:

$$\mathcal{L}'_1(x,y) = 0 \Rightarrow 1 - \lambda(2x-3) = 0 \qquad (i)$$

$$\mathcal{L}'_2(x,y) = 0 \Rightarrow 1 - \lambda = 0 \qquad (ii)$$

$$y + x^2 - 3x = 2 \qquad (iii)$$

(ii) gir $\lambda = 1$ inn i (i):

$$1 - 2x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow \underline{x = 2} \text{ inn i (iii)}$$

$$y + 4 - 6 = 2 \Rightarrow \underline{y = 4}$$

Optimalt punkt: $(x,y) = (2,4)$ som gir $f(x,y) = 6$

c) Det optimale punktet $(x,y) = (2,4)$ finnes som tangeringspunktet mellom bibetingelsen og nivåkurven $f(x,y) = 6$. Dette er et max punkt, siden andre mulige kombinasjoner av x og y (som oppfyller bibetingelsen) ligger på nivåkurven $f(x,y) = 5$, mens nivåkurven $f(x,y) = 7$ ikke er oppnåelig.