FASIT EXAM SØK1001 HØST 2015

Oppg. 1

a)

i) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 5$

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x$$

ii) $f(x) = \frac{1}{x^2} + e^{-2x}$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} - 2e^{-2x}$$

iii) $f(x) = (x^3 - \ln x^2)^5$

$$f'(x) = 5(x^3 - \ln x^2)^4 \cdot \left(3x^2 - \frac{2}{x}\right)$$

iv) $f(x) = e^{3x}(x^4 - 1)$

$$f'(x) = 3e^{3x}(x^4 - 1) + e^{3x} \cdot 4x^3$$

$$= e^{3x}(3x^4 - 3 + 4x^3)$$

$$= e^{3x}(3x^4 + 4x^3 - 3)$$

b) $f(x,y) = \frac{1}{3}xy^2 + 4xy + 2x^3$

$f_1'(x,y) = \frac{1}{3}y^2 + 4y + 6x^2$

$f_2'(x,y) = \frac{2}{3}xy + 4x$

$f_{11}''(x,y) = 12x$

$f_{12}''(x,y) = f_{21}''(x,y) = \frac{2}{3}y + 4$

$f_{22}''(x,y) = \frac{2}{3}x$

c) i) $P(t) = 3 \cdot 1{,}008^t$ (gitt i millioner)

ii) $P(t) = 9$ mill $\Rightarrow 3 \cdot 1{,}008^t = 9$

$1{,}008^t = 3$

$\ln 1{,}008^t = \ln 3$

$t \cdot \ln 1{,}008 = \ln 3$

$t = \frac{\ln 3}{\ln 1{,}008} \approx 138$

iii)

$P(t) = 3 \cdot 1{,}011^t$

$P(t) = 3 \cdot 1{,}02^t$

$P(t) = 3 \cdot 0{,}995^t$

Det tar ca 138 år før befolkningen er tre ganger så høy som i 2015.

Oppg. 2

a) $$f(x) = \frac{\ln(3x-2)}{4-x}$$

D_f: $3x - 2 > 0$ og $4 - x \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$3x > 2$$

$$\Downarrow$$

$x > \frac{2}{3}$ og $x \neq 4$

D_f: $\langle \frac{2}{3}, 4 \rangle$ og $\langle 4, \infty \rangle$

$$f'(x) = \frac{\frac{3}{3x-2} \cdot (4-x) - \ln(3x-2) \cdot (-1)}{(4-x)^2}$$

$$= \frac{3(4-x) + \ln(3x-2) \cdot (3x-2)}{(4-x)^2 \cdot (3x-2)}$$

$$= \frac{12 - 3x + \ln(3x-2)(3x-2)}{(4-x)^2 (3x-2)}$$

b) i) $f(x) = x^3 - 5x + 3$ for $x = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 5$

$f'(0) = -5$

$f(0) = 3$

$\Rightarrow y - 3 = -5(x - 0)$

$\Rightarrow \underline{y = -5x + 3}$

ii) $g(x) = \ln x - x^5$ for $x = 1$

$g'(x) = \frac{1}{x} - 5x^4$

$g'(1) = 1 - 5 = -4$

$g(1) = \ln 1 - 1 = -1$

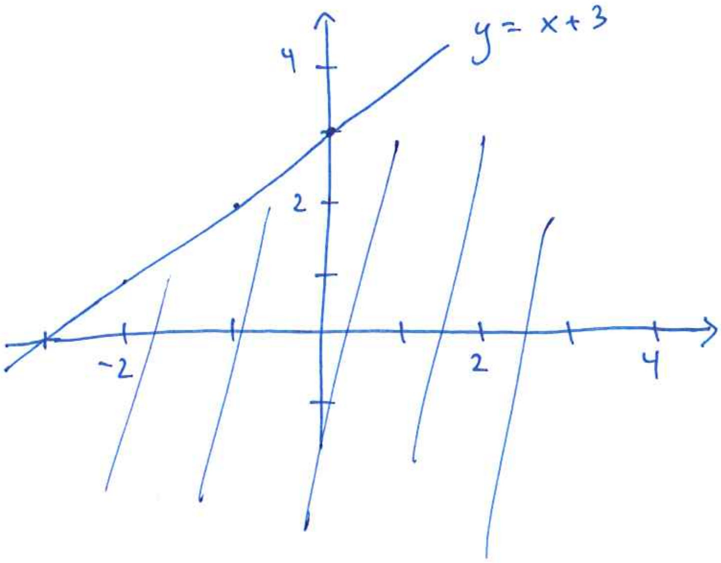
$\Rightarrow y - (-1) = -4(x - 1)$

$\Rightarrow y + 1 = -4x + 4$

$\Rightarrow \underline{y = -4x + 3}$

c) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x-y+3}}$

$D_f: \; x - y + 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad y < x + 3$



$/// = D_f$

Oppg. 3

$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$

a) $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$

$f''(x) = 6x - 3$

b) $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 3x - 6 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{81}}{6}$$

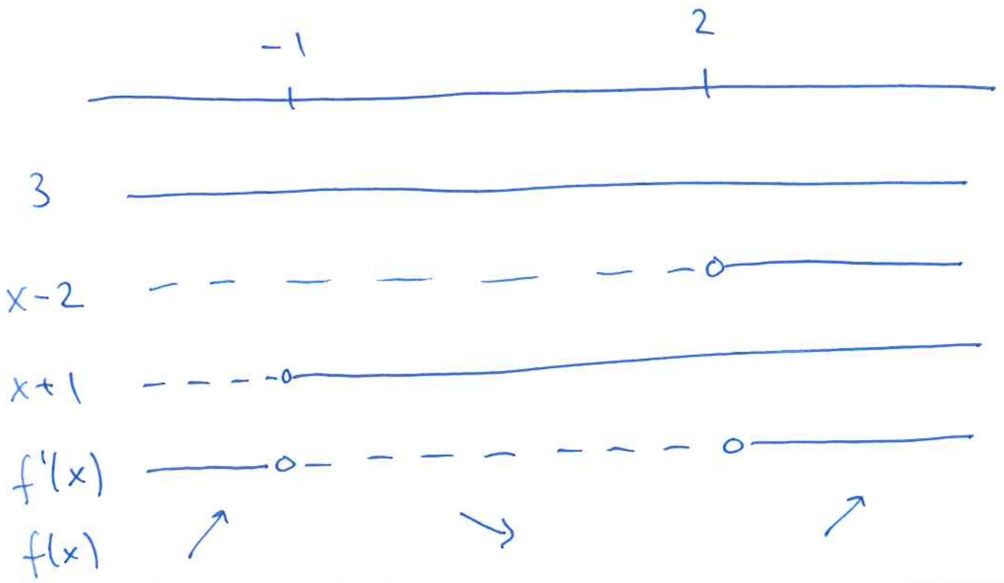
$$x_1 = \frac{3 + 9}{6} = 2$$

$$x_2 = \frac{3 - 9}{6} = -1$$

To stasjonære punkt: $(x, y) = (2, -10)$

$(x, y) = (-1, \frac{7}{2})$

$$f'(x) = 3(x-2)(x+1)$$



Lokalt max i $x = -1$.

Lokalt min i $x = 2$.

c) $f''(x) = 6x - 3$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 6x = 3$$

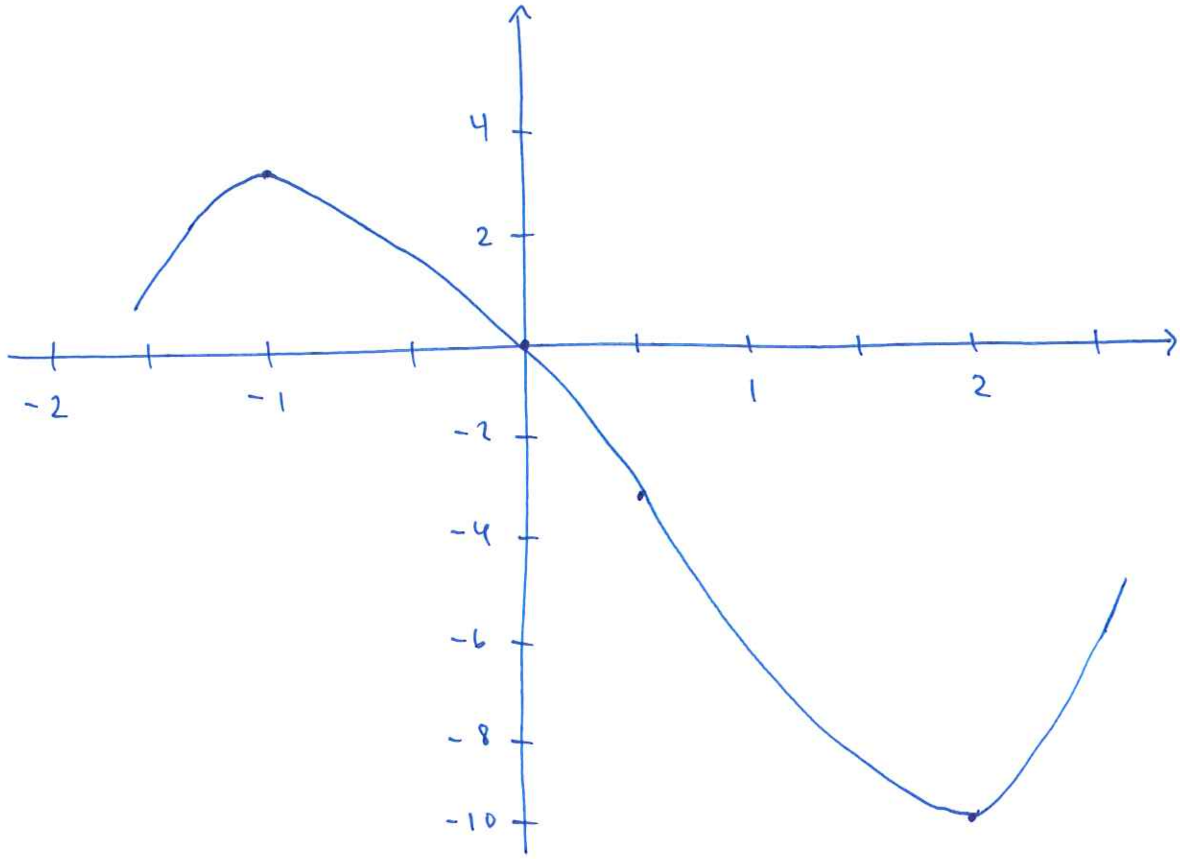
$$\Rightarrow \underline{x = \tfrac{1}{2}}$$

$$f''(x) = 6\left(x - \tfrac{1}{2}\right)$$

		$\frac{1}{2}$	
6	———		———
$x - \frac{1}{2}$	- - - -	0	———
$f''(x)$	- - - -	0	———
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

Siden $f''(\frac{1}{2}) = 0$ og f'' skifter fortegn rundt $x = \frac{1}{2}$, er dette et vendepunkt.

Vendepunkt: $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{13}{4}\right)$



Oppg. 4

$$2x^2 - 2xy + y^2 = 8$$

a) Skjæring med 1. aksen:

$y = 0$ gir $2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$(2, 0)$ og $(-2, 0)$

Skjæring med 2. aksen:

$x = 0$ gir $y^2 = 8 \Rightarrow y = \pm\sqrt{8} \approx \pm 2{,}8$

$(0, \sqrt{8})$ og $(0, -\sqrt{8})$

b) $4x - (2y + 2xy') + 2yy' = 0$

$4x - 2y - 2xy' + 2yy' = 0$

$(2y - 2x)y' = 2y - 4x$

$$y' = \frac{2y - 4x}{2y - 2x}$$

$$\underline{y' = \frac{y - 2x}{y - x}}$$

c) $y' = 0$ gir $y = 2x$ (i)

I tillegg må punktet ligge på kurva:

$2x^2 - 2xy + y^2 = 8$ (ii)

Sett (i) inn i (ii):

$2x^2 - 2x \cdot 2x + (2x)^2 = 8$

$\Rightarrow 2x^2 - 4x^2 + 4x^2 = 8$

$\Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$x = 2$ gir $y = 2 \cdot 2 = 4$

$x = -2$ gir $y = 2 \cdot (-2) = -4$

To punkt med horisontal tangent:

$(x, y) = (2, 4)$ og $(x, y) = (-2, -4)$

d) $y' \to \infty$ gir $y = x$ (i)

I tillegg må punktet ligge på kurva:

$2x^2 - 2xy + y^2 = 8$ (ii)

Sett (i) inn i (ii):

$2x^2 - 2x^2 + x^2 = 8$

$\Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8} \approx \pm 2,8$

$x = \sqrt{8}$ gir $y = \sqrt{8}$

$x = -\sqrt{8}$ gir $y = -\sqrt{8}$

To punkt med vertikal tangent:

$(x, y) = (\sqrt{8}, \sqrt{8})$ og $(x, y) = (-\sqrt{8}, -\sqrt{8})$

Oppg. 5

a) Max/min $f(x,y) = x^2 - 2x + y$

gitt at $y - 2x = 4$

$\mathcal{L}(x,y) = x^2 - 2x + y - \lambda(y - 2x - 4)$

Betingelser for optimum:

$\mathcal{L}_1'(x,y) = 0 \Rightarrow 2x - 2 + 2\lambda = 0$ (i)

$\mathcal{L}_2'(x,y) = 0 \Rightarrow 1 - \lambda = 0$ (ii)

$y - 2x = 4$ (iii)

(ii) gir $\lambda = 1$, settes inn i (i):

$2x - 2 + 2 = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow \underline{x = 0}$

Fra (iii) $y = 4 + 2x = 4 + 2 \cdot 0 = \underline{4}$

Optimum i punktet $(x,y) = (0,4)$ med funksjonsverdi lik 4. $(f(0,4) = 4)$.

b)

* $f(x,y) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + y = 0$

$\Rightarrow y = -x^2 + 2x$

Konkav 2.gradsfunksjon

$y' = -2x + 2 \Rightarrow$ Toppunkt for $y' = 0$: $-2x + 2 = 0$

$\Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow \underline{x = 1}$

x	-1	0	1	2	3
y	-3	0	1	0	-3

* $f(x,y) = 4 \Rightarrow x^2 - 2x + y = 4$

$\Rightarrow y = -x^2 + 2x + 4$

Konkav 2-gradsfunksjon med toppunkt for $x = 1$.

x	-1	0	1	2	3
y	1	4	5	4	1

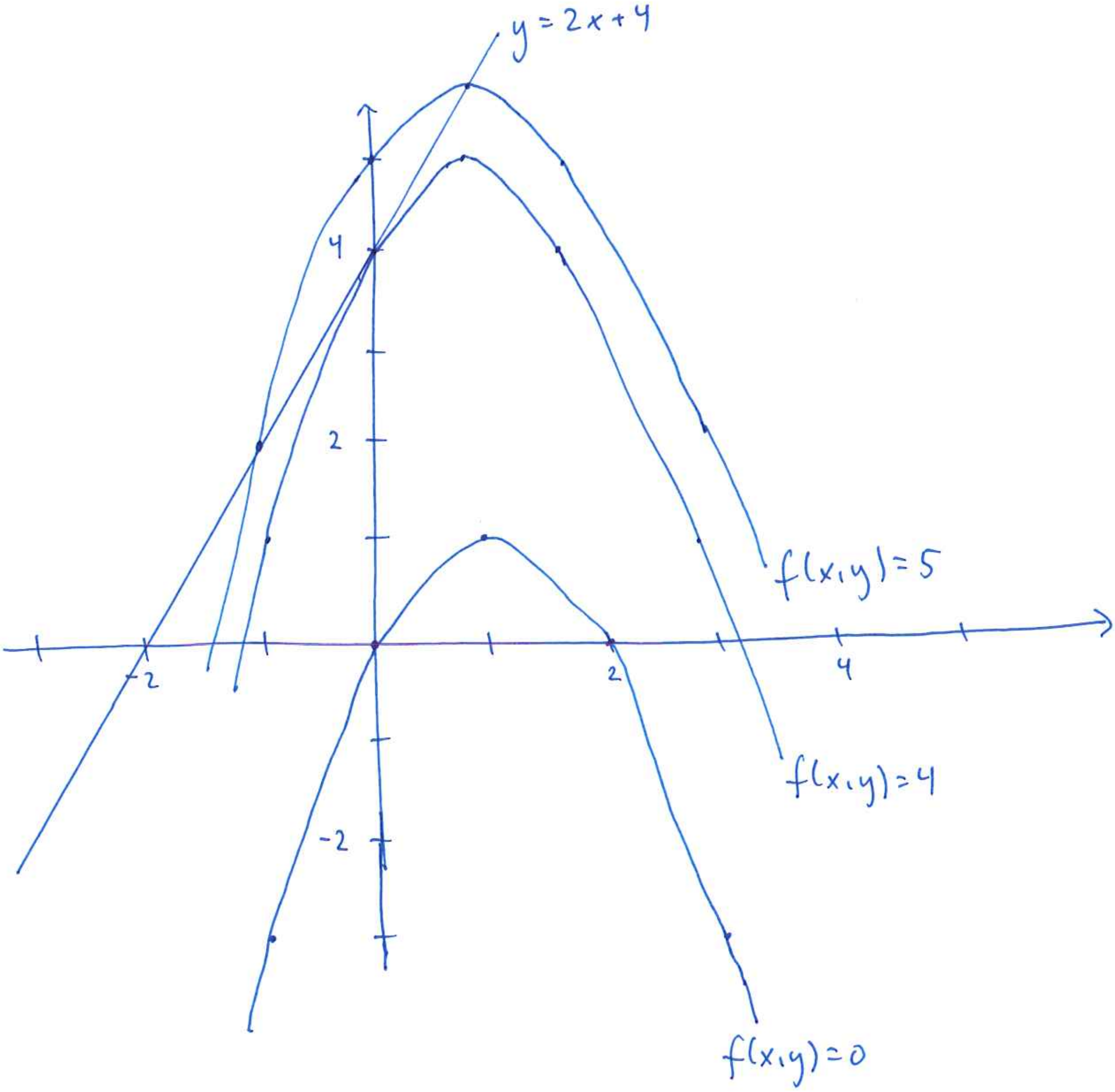
* $f(x,y) = 5 \Rightarrow x^2 - 2x + y = 5$

$$\Rightarrow y = -x^2 + 2x + 5$$

Konkav 2. gradsfunksjon med toppunkt for $x = 1$.

x	-1	0	1	2	3
y	2	5	6	5	2

* $y - 2x = 4 \Rightarrow y = 2x + 4$: Rett linje med stigningstall lik 2 og skjæring med 2. aksen for $y = 4$.



c) Punktet $(x,y) = (0,4)$ er et minimumspunkt, siden det ikke er mulig å komme på en lavere nivåkurve enn $f(x,y) = 4$.