FASIT EKSAMEN SØK1001 HØSTEN 2017

Oppg. 1

a) i) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - 2x^2 + \frac{1}{x} - 2$

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^4 - 4x - \frac{1}{x^2}$$

ii) $f(x) = \dfrac{4x^2-3}{1-x^3}$

$$f'(x) = \frac{8x(1-x^3) - (4x^2-3)(-3x^2)}{(1-x^3)^2}$$

$$= \frac{8x - 8x^4 + 12x^4 - 9x^2}{(1-x^3)^2}$$

$$= \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(1-x^3)^2}$$

iii) $f(x) = (x^3 - \ln x)^4$

$$f'(x) = 4(x^3 - \ln x)^3\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)$$

iv) $f(x) = \frac{1}{3} x^3 e^{4x}$

$$f'(x) = x^2 e^{4x} + \frac{1}{3} x^3 e^{4x} \cdot 4$$

$$= x^2 e^{4x} \left(1 + \frac{4}{3} x\right)$$

b) i) $P(t) = 7\,000\,000 \cdot 1{,}014^t$

ii) $P(t) = 14\,000\,000 \Rightarrow 1{,}014^t = 2$

$$\Rightarrow \ln 1{,}014^t = \ln 2$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}014}$$

$$\Rightarrow \underline{t = 49{,}86}$$

Det tar ca 50 år før befolkningen er fordoblet.

c) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

$f'(x) = 6x - 2$

$f'(1) = 4$

$f(1) = 2$

$$\Rightarrow y - 2 = 4(x - 1) \Rightarrow \underline{y = 4x - 2}$$

d) $f(x) = \ln(2x-1)$

Def. mengde: $2x-1 > 0$

$$\Downarrow$$

$$2x > 1$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{x > \frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x-1} \cdot 2 = \underline{\frac{2}{2x-1}}$$

e) $x^2 - xy + 2y^2 = 14$

Implisitt derivasjon:

$$2x - (y + xy') + 4yy' = 0$$

$$2x - y - xy' + 4yy' = 0$$

$$(-x + 4y)y' = y - 2x$$

$$\underline{y' = \frac{y-2x}{4y-x}}$$

Horisontal tangent:

$$y' = 0 \Rightarrow y - 2x = 0 \Rightarrow y = 2x$$

Punktet må ligge på kurven: $x^2 - xy + 2y^2 = 14$

To likninger og to ukjente:

$$y = 2x \qquad (i)$$

$$x^2 - xy + 2y^2 = 14 \quad (ii)$$

Sett (i) inn i (ii):

$$x^2 - x \cdot 2x + 2(2x)^2 = 14$$

$$x^2 - 2x^2 + 8x^2 = 14$$

$$7x^2 = 14$$

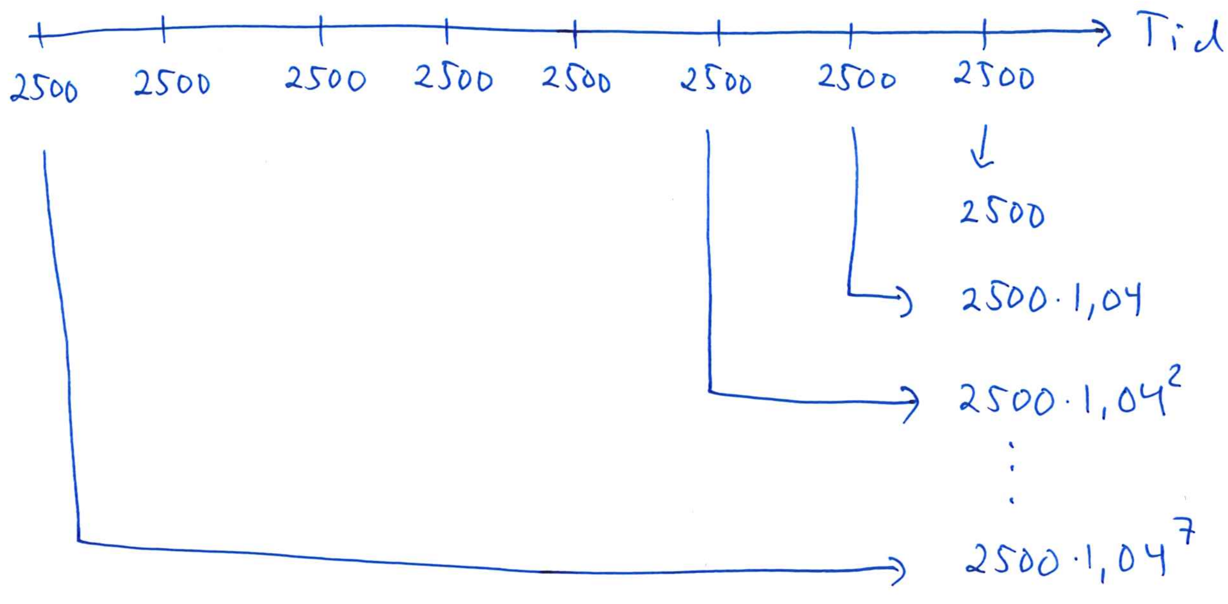
$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2} \qquad \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{2}$$

Horisontal tangent i punktene $(x,y) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ og $(x,y) = (-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

Oppg. 2

a)



Summen av sluttverdiene er en geometrisk rekke med $a_1 = 2500$, $k = 1,04$ og $n = 8$.

Summen er:

$$a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = 2500 \cdot \frac{1,04^8 - 1}{1,04 - 1} = \underline{23035,57}$$

Evt ved bruk av formel direkte:

$$K = \frac{D}{r}\left((1+r)^n - 1\right)$$

$$= \frac{2500}{0,04}\left(1,04^8 - 1\right) = \underline{23035,57}$$

b) Bruker formelen fra oppg. a: $K = \frac{D}{r}\left((1+r)^n - 1\right)$

$$\Rightarrow 35000 = \frac{2500}{0,04}\left(1,04^n - 1\right)$$

Løser for n:

$$1{,}04^n - 1 = \frac{35000 \cdot 0{,}04}{2500}$$

$$1{,}04^n = 1{,}56$$

$$\ln 1{,}04^n = \ln 1{,}56$$

$$n \cdot \ln 1{,}04 = \ln 1{,}56$$

$$n = \frac{\ln 1{,}56}{\ln 1{,}04}$$

$$\underline{n = 11{,}3}$$

Saldoen passerer 35000 kr etter innskudd nr 12.

c) $$D = \frac{K_o\, r\, (1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

der D = terminbeløp

K_o = lånebeløp

r = terminrente

n = antall terminer

$$D = \frac{50000 \cdot 0{,}008 \cdot 1{,}008^{12}}{1{,}008^{12} - 1} = \underline{4386{,}5}$$

Oppg. 3

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$$

a) $f'(x) = -2x^2 + x + 3$

$f''(x) = -4x + 1$

b) Stasjonære punkt:

$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + x + 3 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-2) \cdot 3}}{2 \cdot (-2)}$$

$$= \frac{-1 \pm 5}{-4}$$

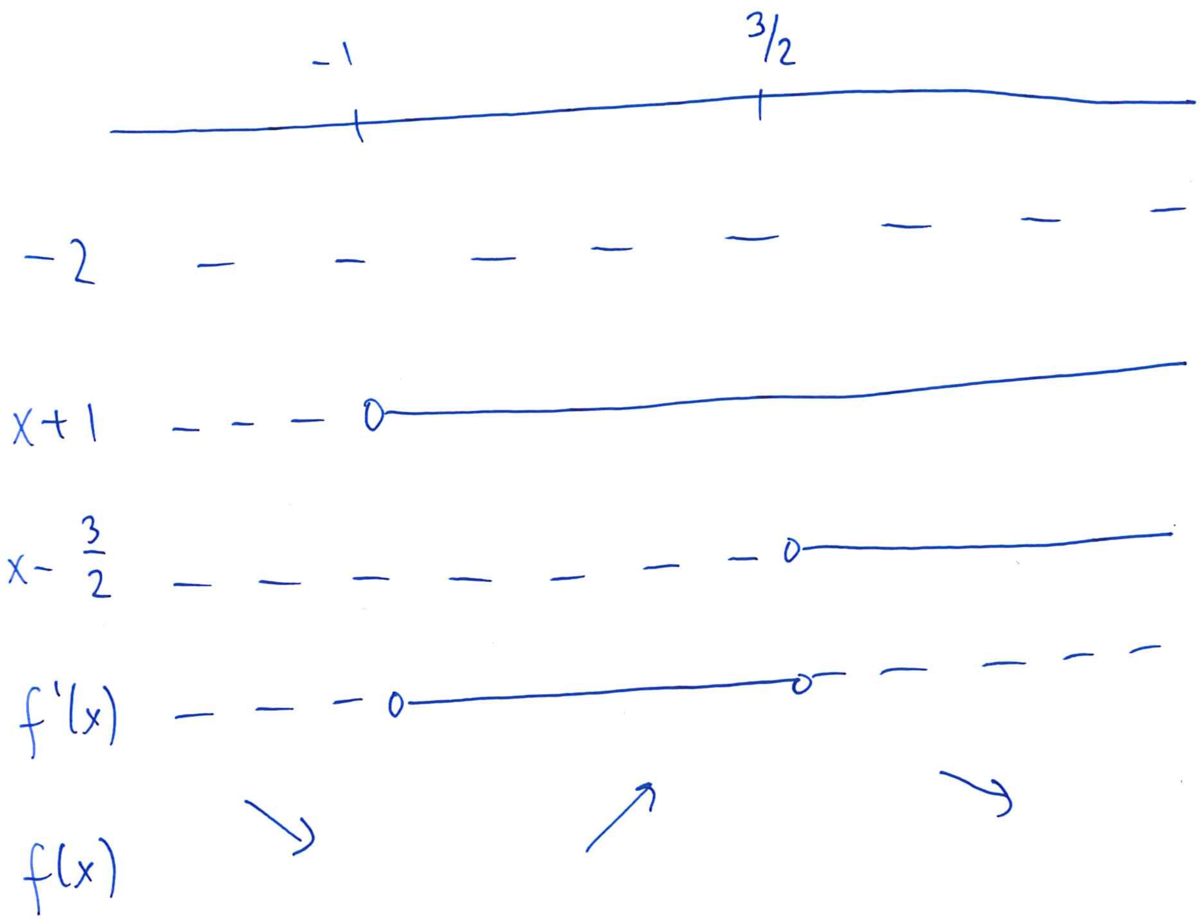
$\Rightarrow x = -1$ og $x = \frac{3}{2}$

To stasjonære punkt:

$(x, y) = (-1, -\frac{5}{6})$ og $(x, y) = (\frac{3}{2}, 4{,}375)$

Førstederiverttesten:

$$f'(x) = -2(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

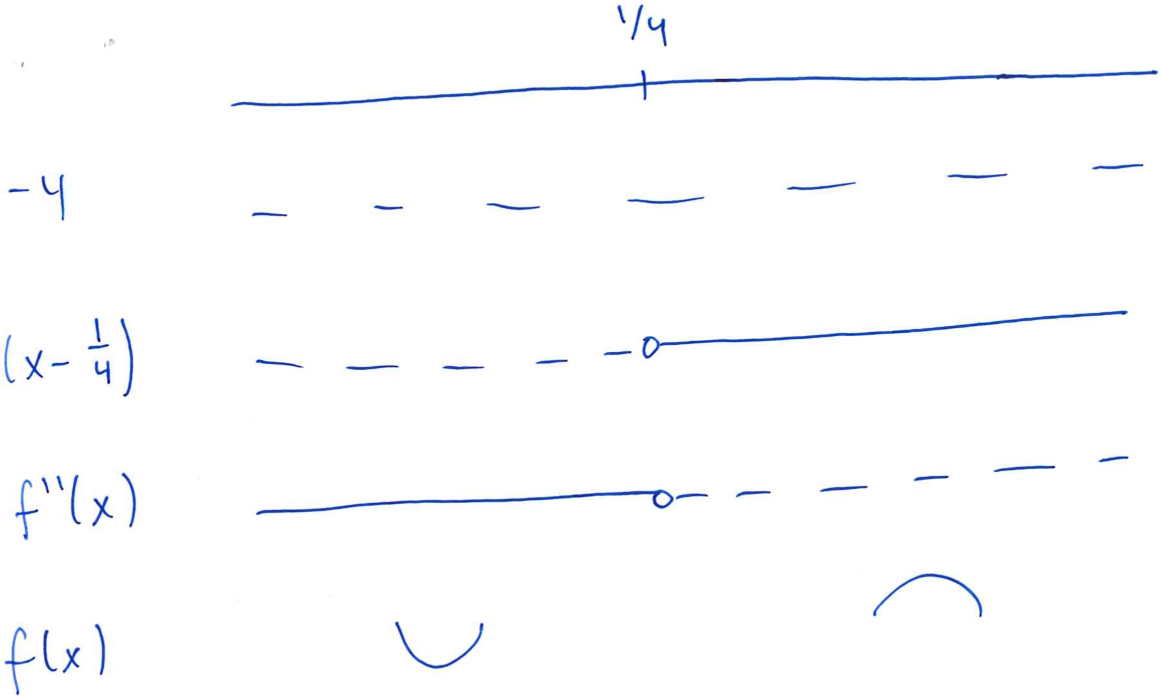


$x = -1$ er lokalt bunnpunkt, mens $x = \frac{3}{2}$ er lokalt toppunkt.

c) Vendepunkt:

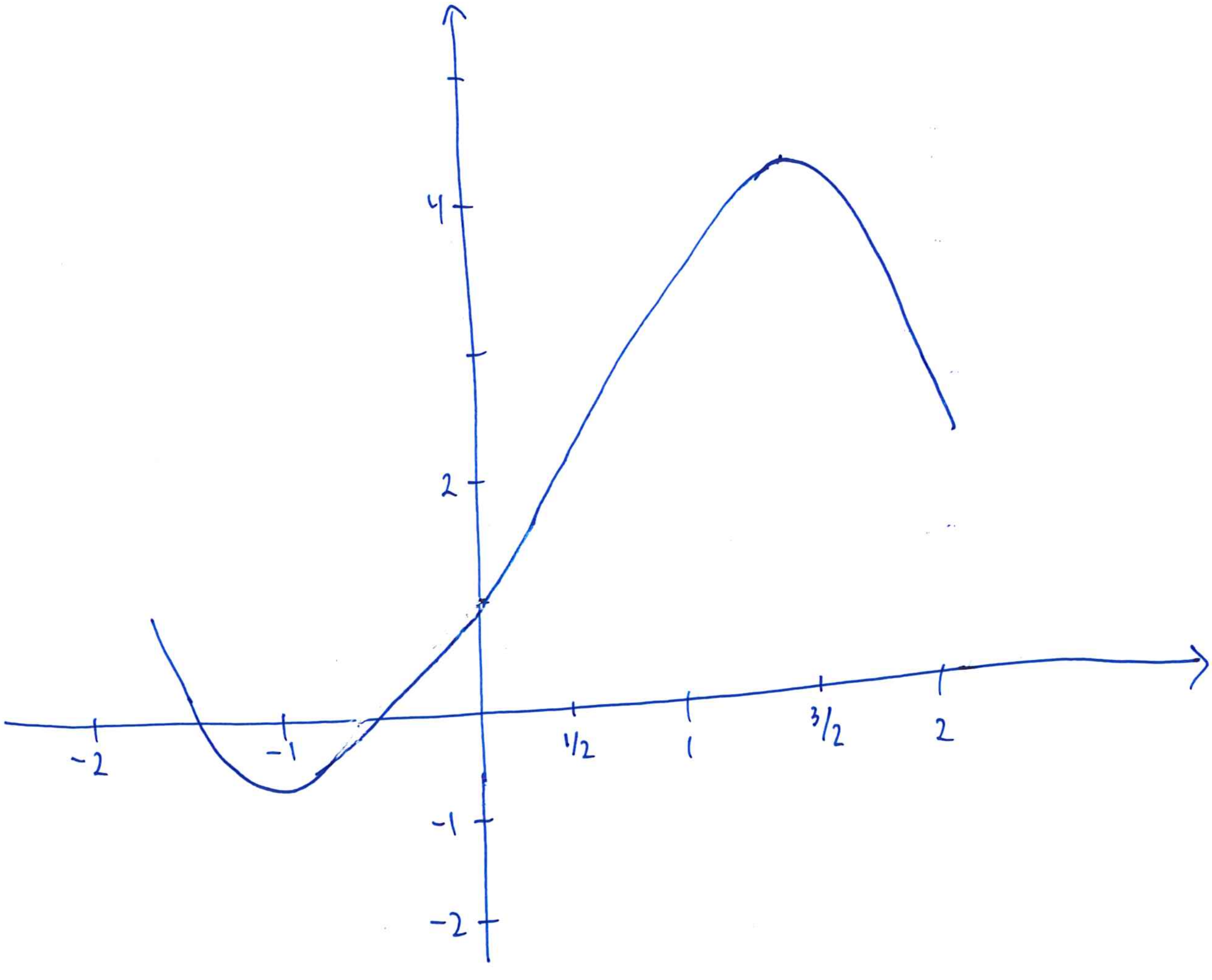
$$f''(x) = 0 \Rightarrow -4x + 1 = 0 \Rightarrow 4x = 1 = \underline{x = \frac{1}{4}}$$

$$f''(x) = -4x + 1 = -4\left(x - \frac{1}{4}\right)$$



Funksjonen går fra konveks til konkav når $x = 1/4$. Punktet $(x, y) = (1/4,\ 1{,}77)$ er derfor et vendepunkt.

d)



Oppg. 4

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}y^2 - 6xy + 11x$$

$$f_1'(x,y) = x^2 - 6y + 11$$

$$f_2'(x,y) = 3y - 6x$$

Stasjonære punkt:

$$x^2 - 6y + 11 = 0 \qquad (i)$$

$$3y - 6x = 0 \qquad (ii)$$

Fra (ii): $3y = 6x \Rightarrow y = 2x$ inn i (i):

$$x^2 - 12x + 11 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{12 \pm 10}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{x = 11} \quad \vee \quad \underline{x = 1}$$

$$\Rightarrow \underline{y = 22} \quad \vee \quad \underline{y = 2}$$

To stasjonære punkt:

$(x,y) = (1,2)$ og $(x,y) = (11,22)$

Klassifisering:

$f''_{11}(x,y) = 2x \quad = A$

$f''_{12}(x,y) = -6 \quad = B$

$f''_{22}(x,y) = 3 \quad = C$

(x,y)	A	B	C	$AC-B^2$	Type punkt
$(1,2)$	2	-6	3	-30	Sadelpunkt
$(11,22)$	22	-6	3	30	Lokalt min

$(x,y) = (1,2)$ er et sadelpunkt, mens $(x,y) = (11,22)$ er et lokalt minimumspunkt.

Oppg. 5

Max $f(x,y) = 12x^{1/4}y^{1/3}$

gitt at $3x + y = 14$

Lagrange:

$$\mathcal{L}(x,y) = 12x^{1/4}y^{1/3} - \lambda(3x + y - 14)$$

Betingelser for optimum:

$$\mathcal{L}_1'(x,y) = 0 \Rightarrow 3x^{-3/4}y^{1/3} - 3\lambda = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$\mathcal{L}_2'(x,y) = 0 \Rightarrow 4x^{1/4}y^{-2/3} - \lambda = 0 \qquad \text{(ii)}$$

$$3x + y = 14 \qquad \text{(iii)}$$

Kombinerer (i) og (ii):

(i) $\lambda = x^{-3/4}y^{1/3}$

(ii) $\lambda = 4x^{1/4}y^{-2/3}$

$\Rightarrow \quad x^{-3/4} y^{1/3} = 4 x^{1/4} y^{-2/3}$

$\Rightarrow \quad y = 4x$ inn i (iii)

(iii) $3x + y = 14$

$\Rightarrow \quad 3x + 4x = 14$

$\Rightarrow \quad 7x = 14$

$\Rightarrow \quad \underline{x = 2}$

Fra $y = 4x$ får vi da $\underline{y = 8}$

Punktet $(x, y) = (2, 8)$ maksimerer $f(x, y)$.

Max verdi: $f(2, 8) = 28{,}54$

Kontroll på at vi har funnet max punkt:

$(x, y) = (1, 11)$ oppfyller også bibetingelsen og har lavere funksjonsverdi: $f(1, 11) = 26{,}69$