FASIT EKSAMEN SØK1001 HØSTEN 2018

Oppg. 1

a) i) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 + 2x^3 - x^2 - 2$

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 2x$$

ii) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2x^3 + 1}$

$$f'(x) = \frac{2x(2x^3+1) - (x^2-3)6x^2}{(2x^3+1)^2}$$

$$= \frac{4x^4 + 2x - 6x^4 + 18x^2}{(2x^3+1)^2}$$

$$= \frac{-2x^4 + 18x^2 + 2x}{(2x^3+1)^2}$$

$$= \frac{2x(-x^3 + 9x + 1)}{(2x^3+1)^2}$$

iii) $f(x) = (x^3 - 2e^{3x})^5$

$$f'(x) = 5(x^3 - 2e^{3x})^4 \cdot (3x^2 - 2e^{3x} \cdot 3)$$

$$= 15(x^3 - 2e^{3x})^4 (x^2 - 2e^{3x})$$

iv) $f(x) = \frac{1}{3} x^3 \ln(1+2x)$

$$f'(x) = x^2 \ln(1+2x) + \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{1+2x} \cdot 2$$

$$= x^2 \ln(1+2x) + \frac{2}{3} x^3 \cdot \frac{1}{1+2x}$$

b) $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$

Def. mengde: $e^x - 1 \geq 0$

$\Rightarrow e^x \geq 1$

$\Rightarrow \ln e^x \geq \ln 1$

$\Rightarrow \underline{x \geq 0}$

$$f(x) = \sqrt{e^x - 1} = (e^x - 1)^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - 1)^{-1/2} \cdot e^x = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

c) $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$

$f(1) = 1 - \frac{1}{2} + 2 + 1 + \frac{1}{2} = 4$

$f'(x) = 3x^2 - x + 2 - \frac{1}{x^2}$

$f'(1) = 3 - 1 + 2 - 1 = 3$

Tangentlikningen blir da:

$y - 4 = 3(x-1)$

$\Rightarrow y = 3x - 3 + 4$

$\Rightarrow y = 3x + 1$

d) $4x^2 - 2xy + y^2 = 12$

Deriverer mhp x:

$8x - (2y + 2xy') + 2yy' = 0$

$\Rightarrow 8x - 2y - 2xy' + 2yy' = 0$

$\Rightarrow (2y - 2x)y' = 2y - 8x$

$\Rightarrow y' = \frac{2y - 8x}{2y - 2x} \quad \Rightarrow y' = \frac{y - 4x}{y - x}$

Horisontal tangent:

$$y' = 0 \Rightarrow y = 4x$$

I tillegg må punktet ligge på grafen:

$$4x^2 - 2xy + y^2 = 12$$

To likninger og to ukjente:

$$y = 4x \quad (i)$$

$$4x^2 - 2xy + y^2 = 12 \quad (ii)$$

Sett (i) inn i (ii):

$$4x^2 - 2x \cdot 4x + (4x)^2 = 12$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 8x^2 + 16x^2 = 12$$

$$\Rightarrow 12x^2 = 12$$

$$\Rightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = \pm 1$$

Fra (i) har vi da at $y = \pm 4$.

To punkt med horisontal tangent:

$(x, y) = (1, 4)$ og $(x, y) = (-1, -4)$

Oppg. 2

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 5$

$f'(x) = 2x^2 - 3x - 2$

Stasjonære punkt: $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2}$

$= \frac{3 \pm 5}{4}$

$\Rightarrow x = \frac{3+5}{4} = 2 \quad \vee \quad x = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$

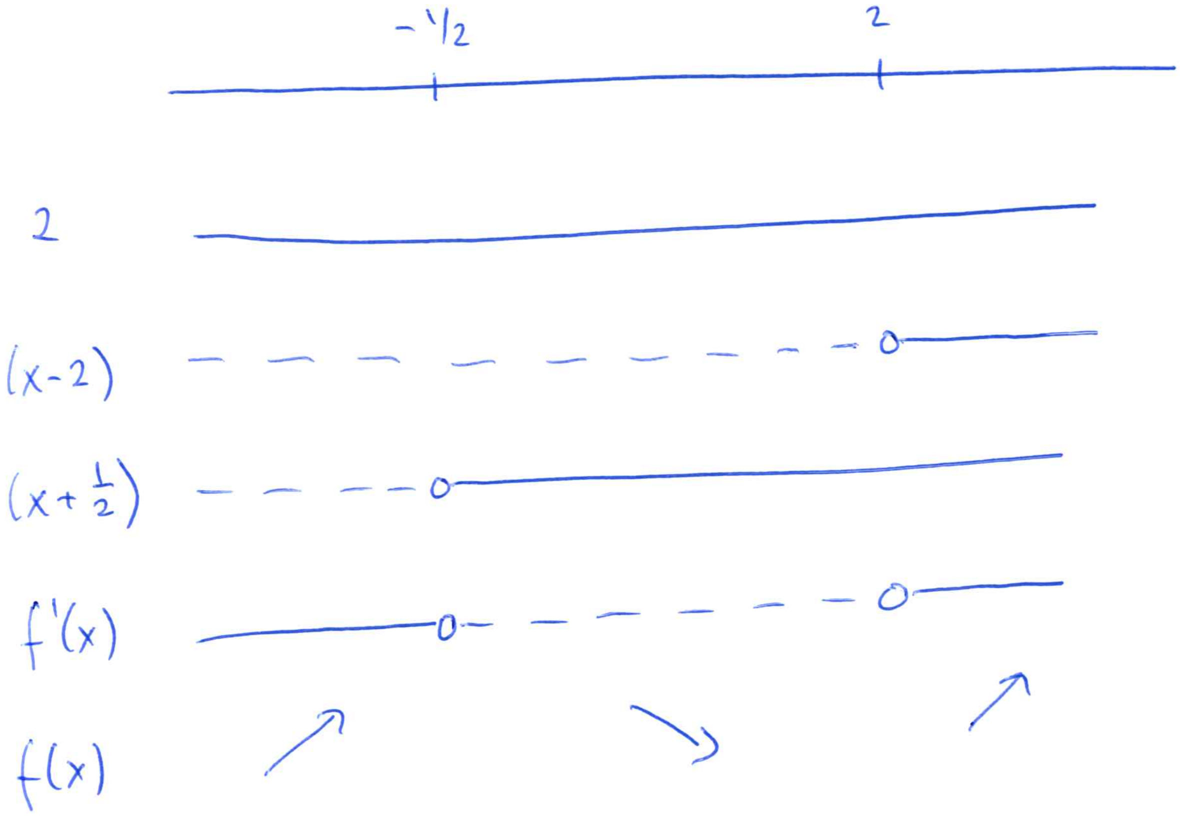
To stasjonære punkt: $x = 2$ og $x = -\frac{1}{2}$

Faktoriserer $f'(x)$:

$$f'(x) = 2x^2 - 3x - 2$$

$$= 2(x-2)(x+\tfrac{1}{2})$$

Fortegnsskjema for $f'(x)$:



Lokalt max for $x = -\frac{1}{2}$ og lokalt min for $x = 2$.

Tilhørende funksjonsverdier:

$$f(-\tfrac{1}{2}) = \frac{133}{24} \quad (\approx 5{,}54)$$

$$f(2) = \frac{1}{3}$$

b) $g(x) = \ln(x^2+1)$

$$g'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$g''(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

Vendepunkt: $g''(x) = 0$

$\Rightarrow -2x^2 + 2 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 = 2$

$\Rightarrow x^2 = 1$

$\Rightarrow x = \pm 1$

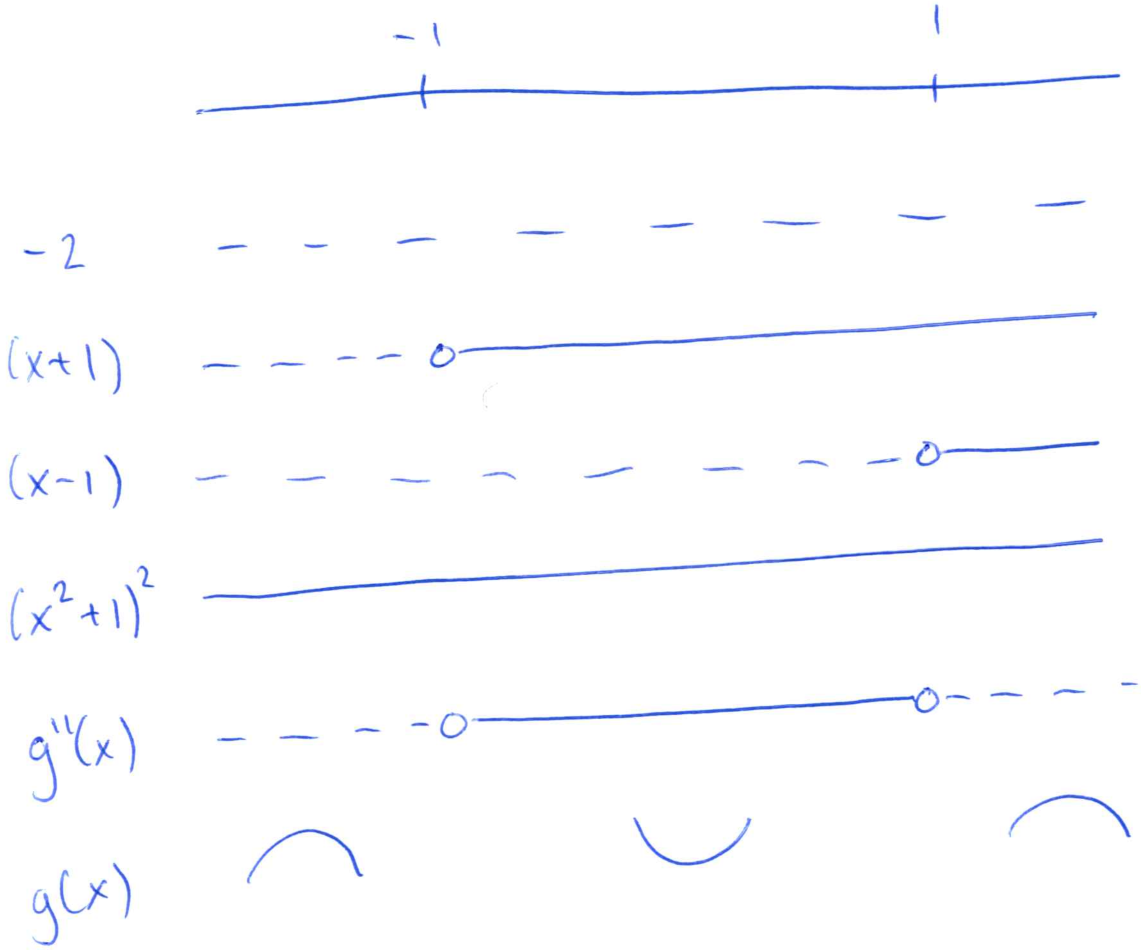
Faktoriserer $g''(x)$:

$$g''(x) = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

Fortegnsskjema for $g''(x)$:



Funksjonen er konkav for $x < -1$ og $x > 1$, og konveks for $-1 < x < 1$. Vendepunkt for $x = -1$ og $x = 1$. Tilhørende funksjonsverdi: $g(-1) = g(1) = \ln 2$.

Oppg. 3

a) Nåverdi av fremtidig utbetalt pengebeløp:

$$K_0 = K_t (1+r)^{-t}$$

Her er $K_0 = 40\,000$, $r = 0{,}03$ og $t = 10$.

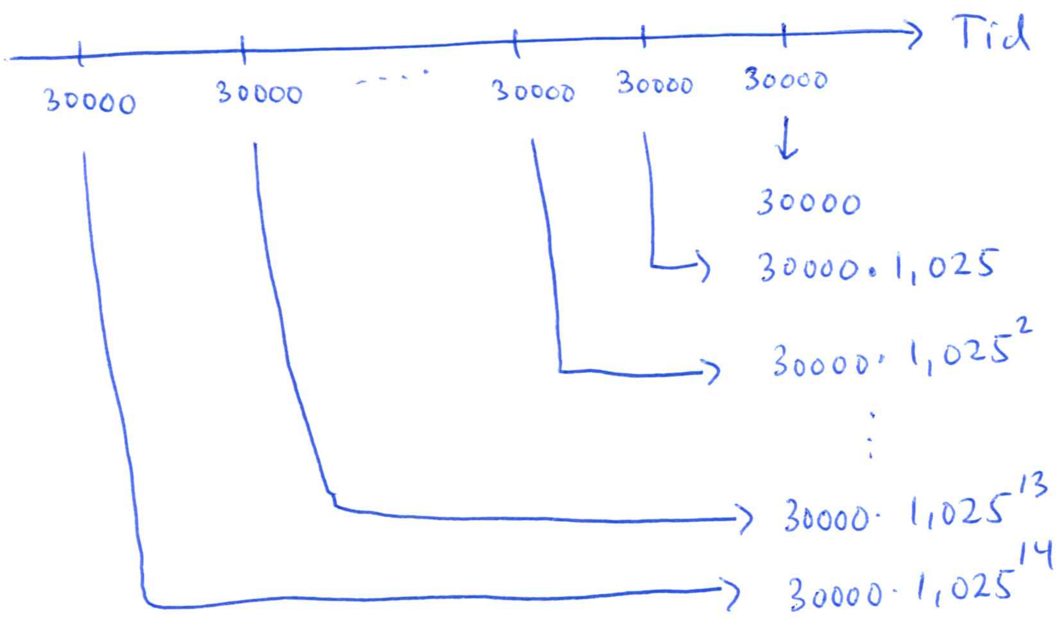
Løser for K_{10}:

$$40000 = K_{10} \cdot 1{,}03^{-10}$$

$$\Rightarrow K_{10} = 40000 \cdot 1{,}03^{10}$$

$$= \underline{53756{,}66}$$

b)



Summen av sluttverdiene er en geometrisk rekke med $a_1 = 30000$, $k = 1{,}025$ og $n = 15$.

Summen er:

$$a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = 30000 \cdot \frac{1{,}025^{15} - 1}{1{,}025 - 1} = \underline{537957{,}8}$$

Evt. ved bruk av formel direkte:

$$K = \frac{D}{r}\left((1+r)^n - 1\right)$$

$$= \frac{30000}{0{,}025}\left(1{,}025^{15} - 1\right) = \underline{537957{,}8}$$

c) $$D = \frac{K_0 \, r \, (1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

der D = terminbeløp

K_0 = lånebeløp

r = terminrente

n = antall terminer

$$D = \frac{80000 \cdot 0{,}012 \cdot 1{,}012^{24}}{1{,}012^{24} - 1} = \underline{3856{,}2}$$

Oppg. 4

$$f(x,y) = \frac{2}{3}y^3 - \frac{5}{2}x^2 - 5xy - 12y$$

Stasjonære punkt:

$$f_1'(x,y) = 0 \Rightarrow -5x - 5y = 0 \qquad (i)$$

$$f_2'(x,y) = 0 \Rightarrow 2y^2 - 5x - 12 = 0 \qquad (ii)$$

(i) gir $5x = -5y \Rightarrow x = -y$ inn i (ii):

(ii) $2y^2 + 5y - 12 = 0$

$$\Rightarrow y = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{-5 \pm 11}{4}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{2} \quad \vee \quad y = -4$$

$$\Rightarrow x = -\frac{3}{2} \quad \vee \quad x = 4$$

To stasjonære punkt:

$(x,y) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ og $(x,y) = (4,-4)$

Klassifisering:

$f''_{11}(x,y) = -5 \quad = A$

$f''_{12}(x,y) = -5 \quad = B$

$f''_{22}(x,y) = 4y \quad = C$

(x,y)	A	B	C	$AC-B^2$	Type punkt
$\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$	-5	-5	6	-55	Sadelpunkt
$(4,-4)$	-5	-5	-16	55	Lokalt max

Oppg. 5

Max $f(x,y) = 3x^{1/3}y^{1/2}$

gitt at $x + 2y = 10$

$$\mathcal{L}(x,y) = 3x^{1/3}y^{1/2} - \lambda(x + 2y - 10)$$

$$\mathcal{L}_1'(x,y) = 0 \Rightarrow x^{-2/3}y^{1/2} - \lambda = 0 \qquad (i)$$

$$\mathcal{L}_2'(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x^{1/3}y^{-1/2} - 2\lambda = 0 \qquad (ii)$$

$$x + 2y = 10 \qquad (iii)$$

Kombinerer (i) og (ii):

$$\left.\begin{aligned} (i) \quad & \lambda = x^{-2/3}y^{1/2} \\ (ii) \quad & \lambda = \frac{3x^{1/3}y^{-1/2}}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^{-2/3}y^{1/2} = \frac{3x^{1/3}y^{-1/2}}{4}$$

$$\Rightarrow 4x^{-2/3}y^{1/2} = 3x^{1/3}y^{-1/2}$$

$\Rightarrow 4y = 3x$

$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x$

Sett inn i (iii):

$x + 2y = 10$

$\Rightarrow x + \frac{3}{2}x = 10$

$\Rightarrow \frac{5}{2}x = 10 \quad \Rightarrow \quad \underline{x = 4}$

Bruk at $y = \frac{3}{4}x \quad \Rightarrow \quad \underline{y = 3}$

$(x,y) = (4,3)$ maksimerer $f(x,y)$

Max-verdi: $f(4,3) = 3 \cdot 4^{1/3} \cdot 3^{1/2} \approx 8,25$

Annet punkt som oppfyller bibetingelsen er $(x,y) = (2,4)$. Dette gir $f(2,4) = 3 \cdot 2^{1/3} \cdot 4^{1/2} \approx 7,56$.

Vet dermed at $(x,y) = (4,3)$ er et max punkt.