Sensorveiledning SØK1001 våren 2015

Oppgave 1

a) i) $f(x) = \ln(1-x) - x^2 + 2$

$$f'(x) = \frac{1}{1-x} \cdot (-1) - 2x$$

$$= -\frac{1}{1-x} - 2x$$

ii) $f(x) = \dfrac{x^3 - 5}{3x^2 + 2}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(3x^2+2) - (x^3-5) \cdot 6x}{(3x^2+2)^2}$$

$$= \frac{9x^4 + 6x^2 - 6x^4 + 30x}{(3x^2+2)^2}$$

$$= \frac{3x^4 + 6x^2 + 30x}{(3x^2+2)^2}$$

iii) $f(x) = (x^2 - e^{-2x} + 1)^5$

$$f'(x) = 5(x^2 - e^{-2x} + 1)^4 \cdot (2x - e^{-2x} \cdot (-2))$$

$$= 5(x^2 - e^{-2x} + 1)^4 (2x + 2e^{-2x})$$

$$= 10(x^2 - e^{-2x} + 1)^4 (x + e^{-2x})$$

iv) $f(x) = 3x^5 e^{2x^2}$

$f'(x) = 15x^4 \cdot e^{2x^2} + 3x^5 \cdot e^{2x^2} \cdot 4x$

$= 15x^4 e^{2x^2} + 12x^6 e^{2x^2}$

$= \underline{\underline{3x^4 e^{2x^2}(5 + 4x^2)}}$

b) $f(x,y) = \frac{4}{3}x^2y - 2xy + 5y^3$

$f_1' = \frac{8}{3}xy - 2y$

$f_2' = \frac{4}{3}x^2 - 2x + 15y^2$

$f_{11}'' = \frac{8}{3}y$

$f_{22}'' = 30y$

$f_{12}'' = f_{21}'' = \frac{8}{3}x - 2$

c) i) $P(t) = 750.000 \cdot 0,955^t$

ii) $P(t) = 375.000 \Rightarrow 750.000 \cdot 0,955^t = 375.000$

$0,955^t = \frac{1}{2}$

$\ln 0,955^t = \ln \frac{1}{2}$

$t \cdot \ln 0,955 = \ln \frac{1}{2}$

→

$$\Rightarrow \quad t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln 0{,}955}$$

$$= \underline{\underline{15{,}05}}$$

Det tar ca 15 år.

iii) $P(t) = 750.000 \cdot 0{,}98^t$

$P(t) = 750.000 \cdot 0{,}993^t$

$P(t) = 750.000 \cdot 0{,}915^t$

Oppgave 2

a) i) $f(x) = x^2 - 5x + 3 \quad \Rightarrow f(2) = -3$

$f'(x) = 2x - 5 \quad \Rightarrow f'(2) = -1$

$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$

$y + 3 = -1(x - 2)$

$\underline{\underline{y = -x - 1}}$

ii) $g(x) = \ln(2+x) + x^2 \quad \Rightarrow g(-1) = 1$

$g'(x) = \frac{1}{2+x} + 2x \quad \Rightarrow g'(-1) = -1$

$$y - y_1 = g'(x_1)(x - x_1)$$

$$y - 1 = -1(x+1)$$

$$\underline{\underline{y = -x}}$$

b) Gitt likningen $2x - 2y + xy^2 + \frac{y}{x} = 0$

Finner y' ved implisitt derivasjon:

$$2 - 2y' + 1 \cdot y^2 + x \cdot 2y \cdot y' + \frac{y' \cdot x - 1 \cdot y}{x^2} = 0 \quad / \cdot x^2$$

$$2x^2 - 2x^2 y' + x^2 y^2 + 2x^3 y y' + x y' - y = 0$$

$$(2x^3 y - 2x^2 + x) y' = y - x^2 y^2 - 2x^2$$

$$\underline{\underline{y' = \frac{y - x^2 y^2 - 2x^2}{2x^3 y - 2x^2 + x}}}$$

c) $f(x) = \frac{\ln(2x-1)}{x-3}$

Def. mengde: $2x - 1 > 0$ og $x \neq 3$

$$\Downarrow$$

$$x > \frac{1}{2}$$

$\therefore$ D_f: $\langle \frac{1}{2}, 3 \rangle$ og $\langle 3, \infty \rangle$

$\rightarrow$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2x-1} \cdot 2(x-3) - \ln(2x-1)}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{\frac{2(x-3)}{2x-1} - \ln(2x-1)}{(x-3)^2}$$

Oppgave 3

$$f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x \quad , \quad x \in [-4, 3]$$

a) $f'(x) = -3x^2 + 3x + 6$

$f'(x) = 0$ gir $\quad x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-3) \cdot 6}}{2 \cdot (-3)}$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{-6} = \frac{-3 \pm 9}{-6}$$

$$\Rightarrow \underline{x_1 = -1} \quad \vee \quad \underline{x_2 = 2}$$

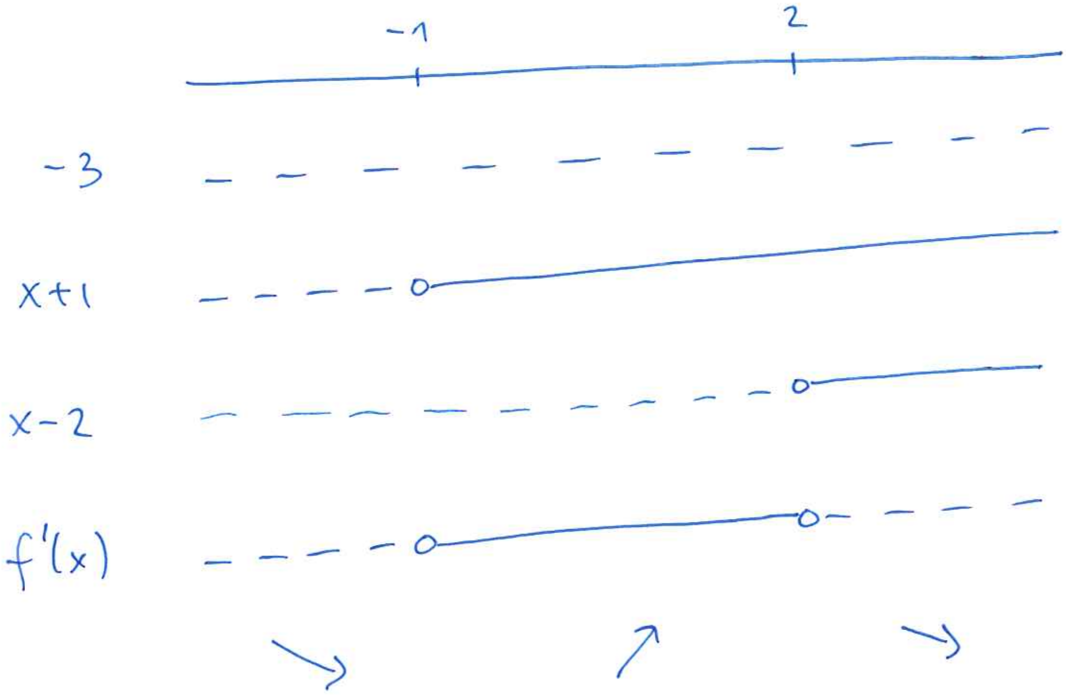
Stasjonære punkt: $(x, y) = (-1, -7/2)$

$(x, y) = (2, 10)$

Begge punktene ligger i definisjonsområdet.

$f'(x)$ kan da skrives: $f'(x) = -3(x+1)(x-2)$

Fortegndiagram:



$(x,y) = (-1, -7/2)$ er lokalt minimumspunkt.

$(x,y) = (2, 10)$ er lokalt maksimumspunkt.

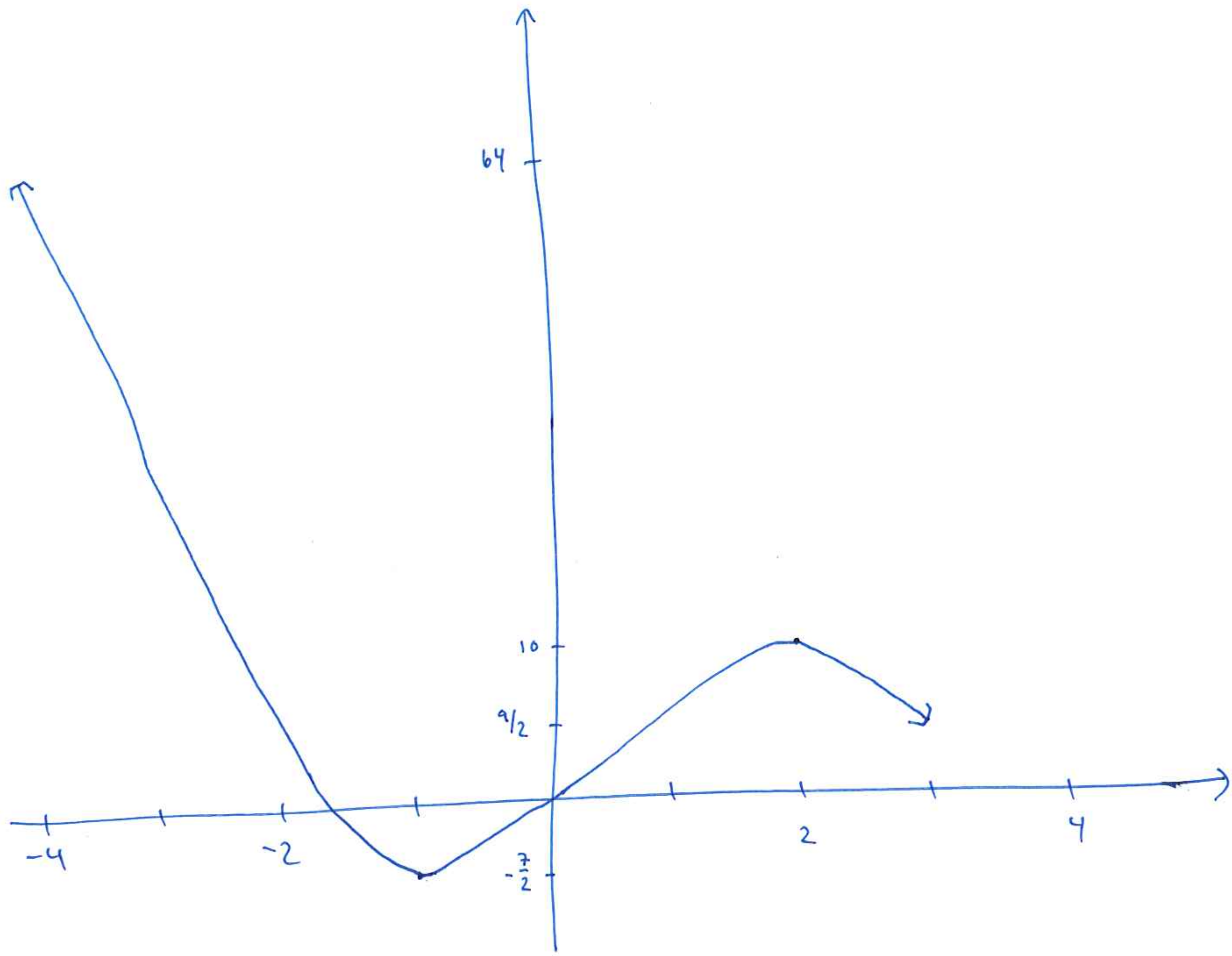
b) $f(-4) = 64$ → globalt max punkt

$f(-1) = -7/2$ → globalt min punkt

$f(2) = 10$

$f(3) = 9/2$

c)



Oppgave 4

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y + 3y^2$$

Stasjonære punkt:

$f_1'(x,y) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6xy = 0 \qquad (i)$

$f_2'(x,y) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6y = 0 \qquad (ii)$

(ii) gir $6y = -3x^2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x^2$ inn i (i)

→

(i) $3x^2 + 6x \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2\right) = 0$

$\Rightarrow \quad 3x^2 - 3x^3 = 0$

$\Rightarrow \quad 3x^2(1-x) = 0$

$\Rightarrow \quad \underline{x = 0} \quad \vee \quad \underline{x = 1}$

To stasjonære punkt:

$(x,y) = (0,0)$ og $(x,y) = (1, -\frac{1}{2})$

Klassifisering:

$f''_{11}(x,y) = 6x + 6y = A$

$f''_{12}(x,y) = 6x = B$

$f''_{22}(x,y) = 6 = C$

(x,y)	A	B	C	$AC-B^2$	Type punkt
$(0,0)$	0	0	6	0	?
$(1,-\frac{1}{2})$	3	6	6	−18	Sadelpunkt

For punktet $(x,y) = (0,0)$ gir testen ingen konklusjon siden $AC - B^2 = 0$.

Oppgave 5

$f(x,y) = x - y$

$f(x,y) = -1 \Rightarrow x - y = -1 \Rightarrow y = x + 1$

$f(x,y) = -\frac{1}{4} \Rightarrow x - y = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = x + \frac{1}{4}$

$f(x,y) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow y = x$

→ Rette linjer med stigningstall lik 1 og skjæring med 2.aksen for hhv $y=1$, $y=\frac{1}{4}$ og $y=0$.

Bibetingelsen er gitt ved $y + x^2 - 2x = 0$

$\Rightarrow y = -x^2 + 2x$ (2. gradsfunksjon)

Nullpunkt: $y = 0$ gir $-x^2 + 2x = 0$

$\Rightarrow -x(x-2) = 0$

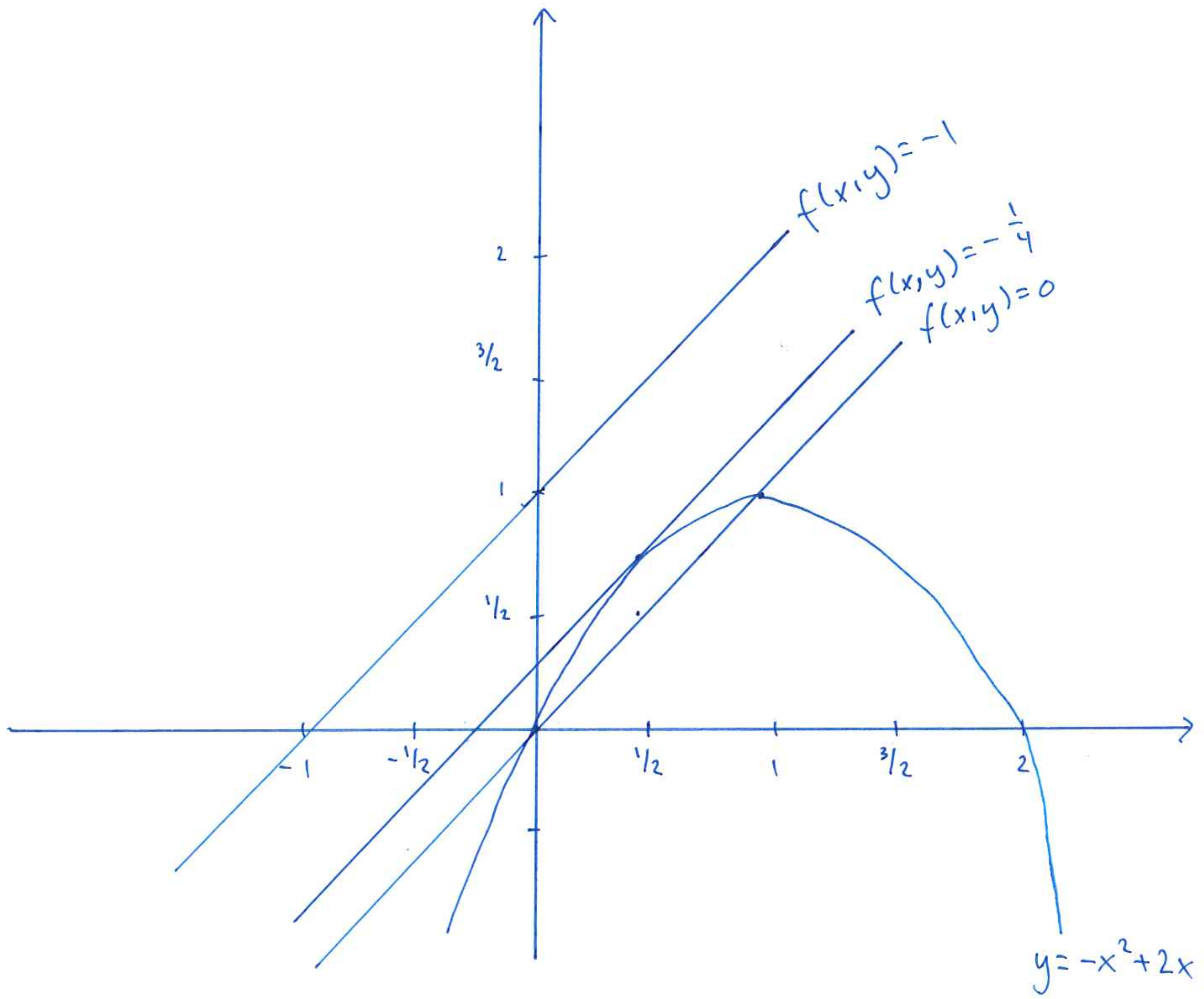
$\Rightarrow \underline{x = 0} \lor \underline{x = 2}$

Toppunkt: $y' = -2x + 2$

$y' = 0$ gir $-2x + 2 = 0$

$\Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow \underline{x = 1}$

Toppunkt i $(x,y) = (1,1)$



b) Max/min $f(x,y) = x-y$

gitt $y+x^2-2x=0$

Lagrangefunksjonen:

$$\mathcal{L}(x,y) = x-y-\lambda(y+x^2-2x)$$

Førsteordensbetingelser:

$$\mathcal{L}_1'(x,y)=0 \Rightarrow 1-\lambda(2x-2)=0 \qquad (i)$$

$$\mathcal{L}_2'(x,y)=0 \Rightarrow -1-\lambda=0 \qquad (ii)$$

$$y+x^2-2x=0 \qquad (iii)$$

(ii) gir $\lambda=-1$, settes inn i (i):

$$1+2x-2=0$$

$$\Rightarrow 2x=1 \quad \Rightarrow \underline{x=\tfrac{1}{2}} \quad \text{inn i (iii)}$$

$$y+\tfrac{1}{4}-1=0 \quad \Rightarrow \underline{y=\tfrac{3}{4}}$$

Optimalt punkt: $(x,y)=\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4}\right)$ som gir

$f(x,y)=\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{4}=-\tfrac{1}{4}$.

Vi ser fra figuren i a) at punktet ligger både på nivåkurven for $f(x,y)=-\tfrac{1}{4}$ og på kurven for bibetingelsen.

c) Det optimale punktet $(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ finnes som tangeringspunktet mellom bibetingelsen og nivåkurven $f(x,y)=-\frac{1}{4}$. Dette er et minimums-punkt, siden alle andre mulige kombinasjoner av x og y (som oppfyller bibetingelsen) ligger på nivåkurver med høyere funksjonsverdi.

Vi ser at nivåkurven $f(x,y)=0$ skjærer bibetingelsen, mens nivåkurven $f(x,y)=-1$ ikke er oppnåelig.

$(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ ligger på lavest mulig nivåkurve og er derfor et minimumspunkt.