FASIT EKSAMEN SØK1001 VÅREN 2016

NB! Dere kan se bort fra oppgave 5

Oppg. 1

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$$

a) $g'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$g''(x) = 6x - 6$

b) Stasjonære punkt: $g'(x) = 0$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 3 \cdot (-9)}}{2 \cdot 3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{144}}{6}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm 12}{6}$$

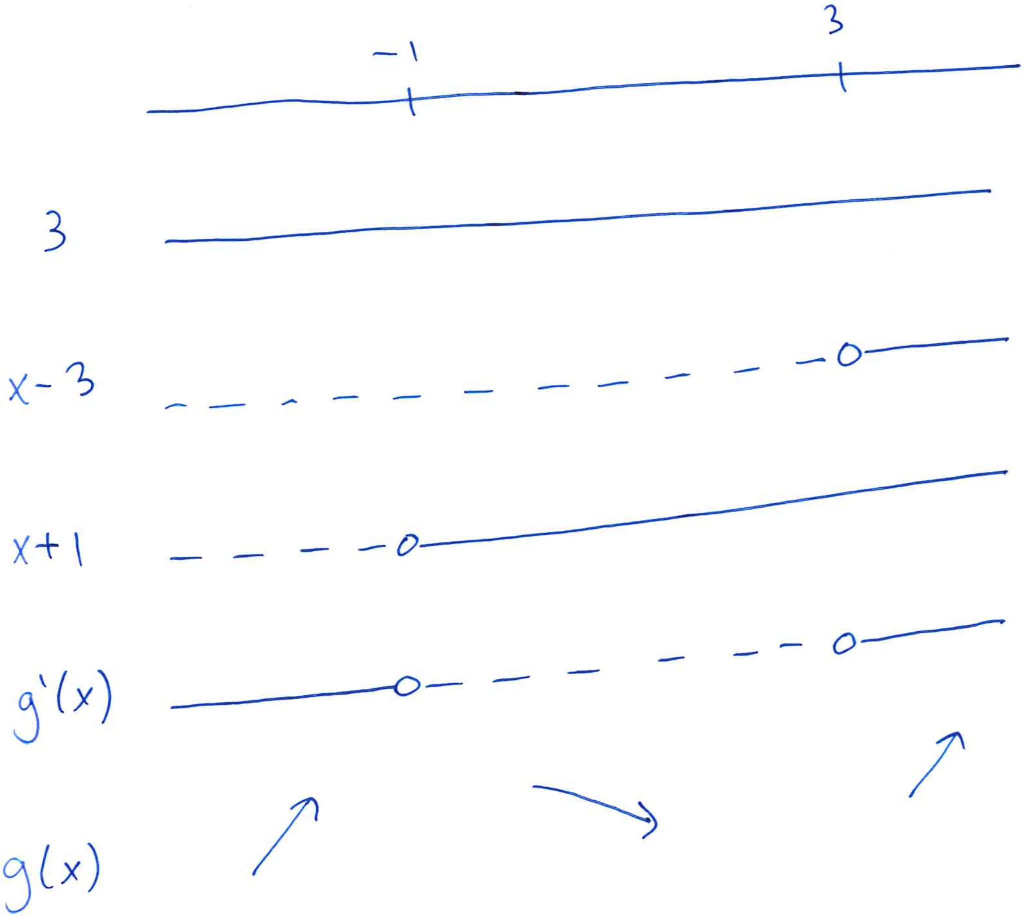
$$\Rightarrow x_1 = \frac{6+12}{6} = 3 \quad \text{og} \quad x_2 = \frac{6-12}{6} = -1$$

To stasjonære punkt:

$(x, y) = (3, -7)$ og $(x, y) = (-1, 25)$

Førstederiverttesten:

$g'(x) = 3(x-3)(x+1)$



$x = -1$ er lokalt toppunkt, mens $x = 3$ er lokalt bunnpunkt.

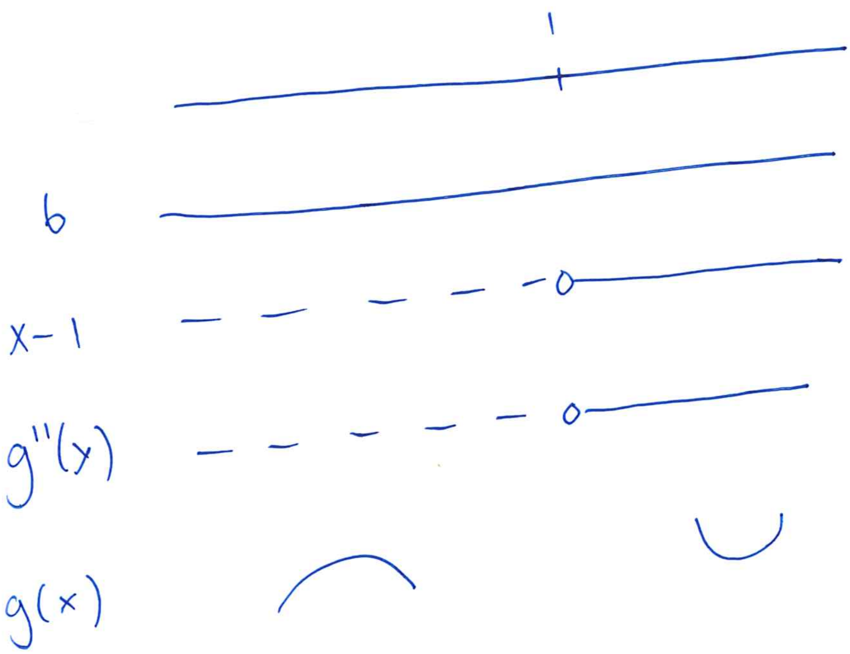
c) Vendepunkt: $g''(x) = 0$

$\Rightarrow 6x - 6 = 0$

$\Rightarrow 6x = 6$

$\Rightarrow \underline{x = 1}$

$g''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$



Funksjonen går fra konkav til konveks når $x = 1$. Punktet $(x, y) = (1, 9)$ er derfor et vendepunkt.

d) Likningen til tangenten til grafen i punktet $(x_1, y_1) = (2, -2)$:

$$y - y_1 = g'(x_1)(x - x_1)$$

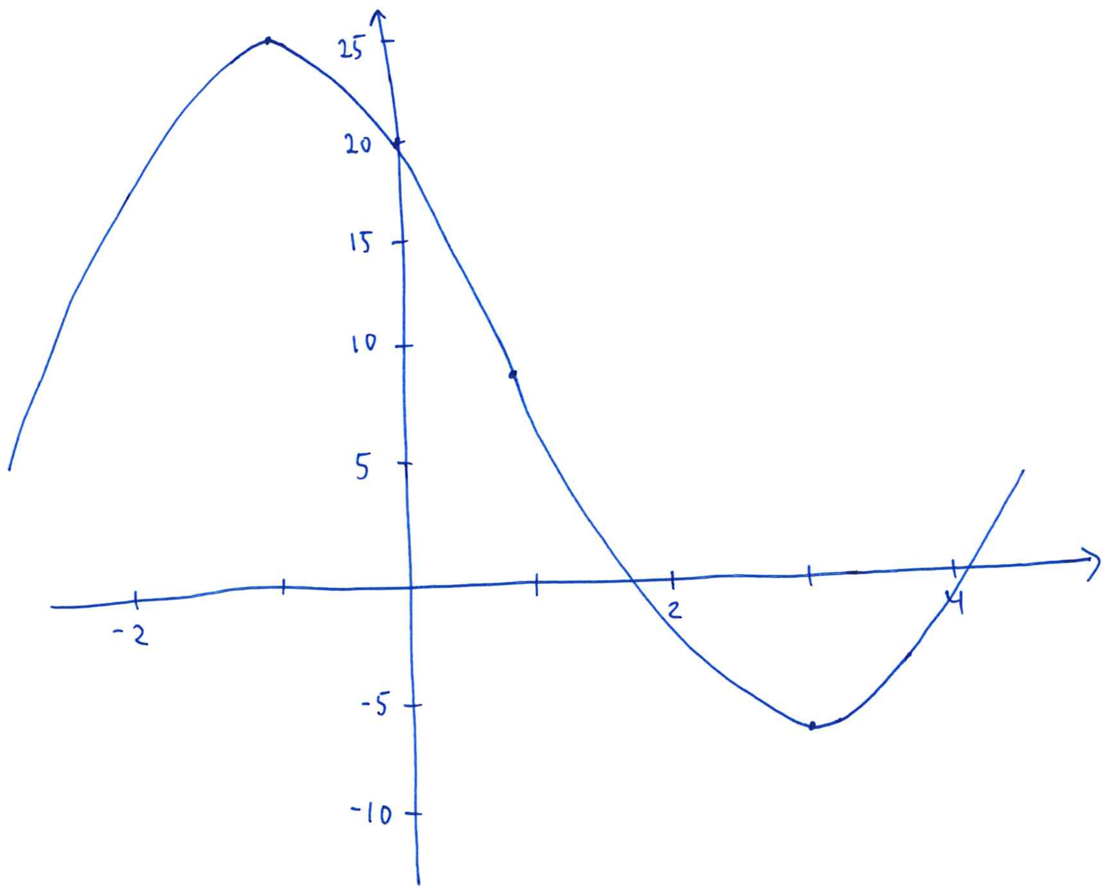
$$\Rightarrow \quad y - (-2) = g'(2)(x - 2)$$

$$\Rightarrow \quad y + 2 = -9(x - 2)$$

$$\Rightarrow \quad y + 2 = -9x + 18$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y = -9x + 16}$$

e)



Oppg. 2

a) i) $f(x) = 4x^5 - 3x^2 + 2x$

$$f'(x) = 20x^4 - 6x + 2$$

ii) $$f(x) = \frac{x^3+5}{5x^3+x}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(5x^3+x) - (x^3+5)(15x^2+1)}{(5x^3+x)^2}$$

$$= \frac{15x^5 + 3x^3 - (15x^5 + x^3 + 75x^2 + 5)}{(5x^3+x)^2}$$

$$= \frac{15x^5 + 3x^3 - 15x^5 - x^3 - 75x^2 - 5}{(5x^3+x)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 75x^2 - 5}{(5x^3+x)^2}$$

iii) $f(x) = (2x^3 - e^{3x} + 1)^9$

$$f'(x) = 9(2x^3 - e^{3x} + 1)^8 (6x^2 - 3e^{3x})$$

$$= 27(2x^3 - e^{3x} + 1)^8 (2x^2 - e^{3x})$$

iv) $f(x) = 2e^{-x} + (\ln x^3)^2$

$$f'(x) = 2e^{-x} \cdot (-1) + 2(\ln x^3) \cdot \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2$$

$$= -2e^{-x} + \frac{6 \ln x^3}{x}$$

b) i) $P(t) = 5{,}2 \cdot 1{,}011^t$

ii) $P(t) = 10{,}4 \Rightarrow 5{,}2 \cdot 1{,}011^t = 10{,}4$

$$\Rightarrow 1{,}011^t = 2$$

$$\Rightarrow \ln 1{,}011^t = \ln 2$$

$$\Rightarrow t \cdot \ln 1{,}011 = \ln 2$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}011}$$

$$\Rightarrow \underline{t = 63{,}36}$$

Det tar ca 63 år før befolkningen er fordoblet.

iii) $P(t) = 5{,}2 \cdot 1{,}006^t$

Fordobling: $5{,}2 \cdot 1{,}006^t = 10{,}4$

$\Rightarrow \quad 1{,}006^t = 2$

$\Rightarrow \quad \ln 1{,}006^t = \ln 2$

$\Rightarrow \quad t \cdot \ln 1{,}006 = \ln 2$

$\Rightarrow \quad t = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}006}$

$\Rightarrow \quad \underline{t = 115{,}87}$

Med 0,6% befolkningsvekst tar det nesten 116 år før befolkningen fordobles.

Oppgave 3

$f(x,y) = x - y$

$f(x,y) = -1 \Rightarrow x - y = -1 \Rightarrow y = x + 1$

$f(x,y) = -\frac{1}{4} \Rightarrow x - y = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = x + \frac{1}{4}$

$f(x,y) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow y = x$

→ Rette linjer med stigningstall lik 1 og skjæring med 2.aksen for hhv $y=1$, $y=\frac{1}{4}$ og $y=0$.

Bibetingelsen er gitt ved $y + x^2 - 2x = 0$

$\Rightarrow y = -x^2 + 2x$ (2. gradsfunksjon)

Nullpunkt: $y = 0$ gir $-x^2 + 2x = 0$

$\Rightarrow -x(x-2) = 0$

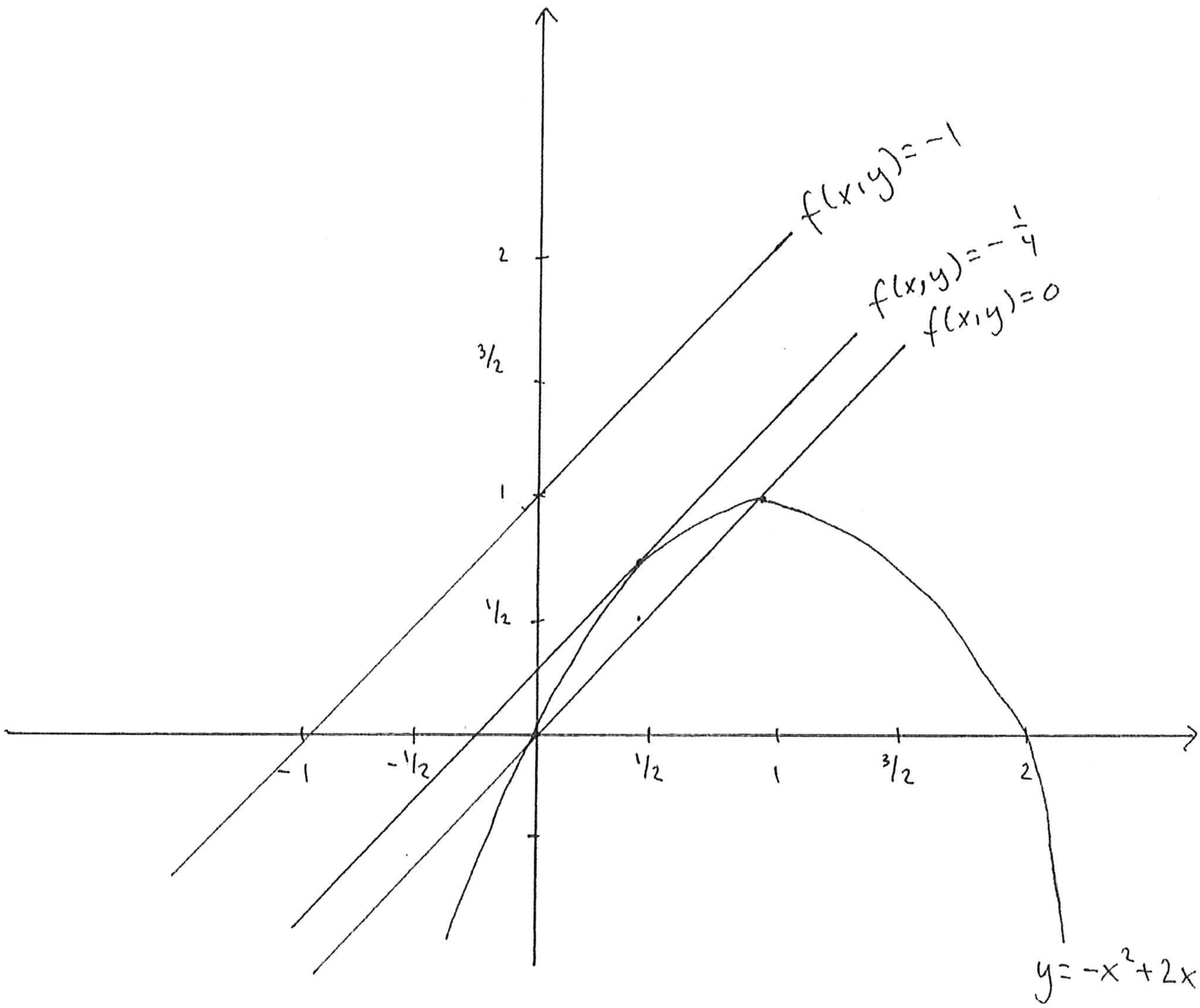
$\Rightarrow \underline{x = 0} \vee \underline{x = 2}$

Toppunkt: $y' = -2x + 2$

$y' = 0$ gir $-2x + 2 = 0$

$\Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow \underline{x = 1}$

Toppunkt i $(x,y) = (1,1)$



b) Max/min $f(x,y) = x - y$

gitt $y + x^2 - 2x = 0$

Lagrangefunksjonen:

$$\mathcal{L}(x,y) = x - y - \lambda(y + x^2 - 2x)$$

Førsteordensbetingelser:

$\mathcal{L}'_1(x,y) = 0 \Rightarrow 1 - \lambda(2x-2) = 0$ (i)

$\mathcal{L}'_2(x,y) = 0 \Rightarrow -1 - \lambda = 0$ (ii)

$y + x^2 - 2x = 0$ (iii)

(ii) gir $\lambda = -1$, settes inn i (i):

$1 + 2x - 2 = 0$

$\Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow \underline{x = \frac{1}{2}}$ inn i (iii)

$y + \frac{1}{4} - 1 = 0 \Rightarrow \underline{y = \frac{3}{4}}$

Optimalt punkt: $(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ som gir

$f(x,y) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$.

Vi ser fra figuren i a) at punktet ligger både på nivåkurven for $f(x,y) = -\frac{1}{4}$ og på kurven for bibetingelsen.

c) Det optimale punktet $(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ finnes som tangeringspunktet mellom bibetingelsen og nivåkurven $f(x,y) = -\frac{1}{4}$. Dette er et minimums-punkt, siden alle andre mulige kombinasjoner av x og y (som oppfyller bibetingelsen) ligger på nivåkurver med høyere funksjonsverdi.
Vi ser at nivåkurven $f(x,y) = 0$ skjærer bibetingelsen, mens nivåkurven $f(x,y) = -1$ ikke er oppnåelig.
$(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ ligger på lavest mulig nivåkurve og er derfor et minimumspunkt.

Oppg. 4

$$f(x,y) = 10x^2 - 3xy + \frac{1}{3}y^2 - 10y$$

Stasjonære punkt:

$f_1'(x,y) = 0 \Rightarrow 20x - 3y = 0$ (i)

$f_2'(x,y) = 0 \Rightarrow -3x + \frac{2}{3}y - 10 = 0$ (ii)

(i) gir $20x = 3y \Rightarrow x = \frac{3}{20}y$ inn i (ii)

→

(ii) $-3 \cdot \frac{3}{20} y + \frac{2}{3} y - 10 = 0$

$\Rightarrow \quad -\frac{9}{20} y + \frac{2}{3} y = 10$

$\Rightarrow \quad -\frac{27}{60} y + \frac{40}{60} y = 10$

$\Rightarrow \quad \frac{13}{60} y = 10$

$\Rightarrow \quad \underline{y = \frac{600}{13}}$

Dette gir $x = \frac{3}{20} \cdot \frac{600}{13} = \underline{\frac{90}{13}}$

Ett stasjonært punkt: $(x, y) = \left(\frac{90}{13}, \frac{600}{13}\right)$

Klassifisering:

$f''_{11}(x, y) = 20 = A$

$f''_{12}(x, y) = -3 = B$

$f''_{22}(x, y) = \frac{2}{3} = C$

(x, y)	A	B	C	$AC - B^2$	Type punkt
$\left(\frac{90}{13}, \frac{600}{13}\right)$	20	-3	$2/3$	$13/3$	Lokalt min