Sensorveiledning SØK1001 våren 2017

Oppgave 1

a) i) $f(x) = \ln(2-x) - 2x^3 + 2$

$$f'(x) = \frac{1}{2-x} \cdot (-1) - 6x^2$$

$$= -\frac{1}{2-x} - 6x^2$$

ii) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 4}{x^2 + 1}$

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2+1) - (2x^3-4)2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{6x^4 + 6x^2 - 4x^4 + 8x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^4 + 6x^2 + 8x}{(x^2+1)^2}$$

iii) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^4 - e^{3x} + 1\right)^6$

$$f'(x) = 6\left(\frac{1}{2}x^4 - e^{3x} + 1\right)^5 \left(2x^3 - 3e^{3x}\right)$$

iv) $f(x) = 2x^4 e^{-2x}$

$f'(x) = 8x^3 e^{-2x} + 2x^4 e^{-2x} (-2)$

$= 8x^3 e^{-2x} - 4x^4 e^{-2x}$

$\underline{\underline{= 4x^3 e^{-2x} (2-x)}}$

b) $f(x,y) = \frac{1}{3} xy^2 - 2xy + 5x^4$

$f_1' = \frac{1}{3} y^2 - 2y + 20x^3$

$f_2' = \frac{2}{3} xy - 2x$

$f_{11}'' = 60x^2$

$f_{22}'' = \frac{2}{3} x$

$f_{12}'' = f_{21}'' = \frac{2}{3} y - 2$

c) i) $P(t) = 800\,000 \cdot 0{,}965^t$

ii) $P(t) = 400\,000$

$\Rightarrow 800\,000 \cdot 0{,}965^t = 400\,000$

$\rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 0{,}965^t = \frac{1}{2}$$

$$\ln 0{,}965^t = \ln \frac{1}{2}$$

$$t \cdot \ln 0{,}965 = \ln \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln 0{,}965}$$

$$\approx \underline{\underline{19{,}5}}$$

Det tar ca 19,5 år.

iii) $P(t) = 600\,000$

$$\Rightarrow \quad 800\,000 \cdot 0{,}965^t = 600\,000$$

$$0{,}965^t = 0{,}75$$

$$\ln 0{,}965^t = \ln 0{,}75$$

$$t \cdot \ln 0{,}965 = \ln 0{,}75$$

$$t = \frac{\ln 0{,}75}{\ln 0{,}965} \approx \underline{8{,}1}$$

Det tar ca 8,1 år.

Oppgave 2

a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$

Tangentlikningen for $x = 3$:

$f(3) = -2$

$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(3) = 2$

$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$ der $x_1 = 3$ og $y_1 = f(3)$

$y + 2 = 2(x - 3)$

$\underline{\underline{y = 2x - 8}}$

b) Gitt likningen $2x^2 - 2xy + y^2 = 4$.

Finner y' ved implisitt derivasjon:

$4x - 2y - 2xy' + 2yy' = 0$

$(2y - 2x)y' = 2y - 4x$

$y' = \dfrac{2y - 4x}{2y - 2x} \Rightarrow \underline{\underline{y' = \dfrac{y - 2x}{y - x}}}$

Tangenten til kurven er horisontal når $y'=0$:

$$y' = \frac{y-2x}{y-x}$$

$y'=0$ gir $y=2x$

Punktet må ligge på kurven: $2x^2-2xy+y^2=4$

Har to likninger og to ukjente:

$y=2x \quad (i)$

$2x^2-2xy+y^2=4 \quad (ii)$

Setter (i) inn i (ii):

$2x^2 - 2x \cdot 2x + (2x)^2 = 4$

$\Rightarrow 2x^2 - 4x^2 + 4x^2 = 4$

$\Rightarrow 2x^2 = 4$

$\Rightarrow x^2 = 2$

$\Rightarrow \underline{x = \pm\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \underline{y = \pm 2\sqrt{2}}$

Tangenten er horisontal i punktene

$(x,y) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

og

$(x,y) = (-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

c) $$f(x) = \frac{\ln(3x-1)}{x-2}$$

Def. mengde: $3x-1 > 0$ og $x \neq 2$

$$\Downarrow$$

$$x > \frac{1}{3}$$

$$D_f : \langle \frac{1}{3}, 2 \rangle \text{ og } \langle 2, \infty \rangle$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{3x-1} \cdot 3(x-2) - \ln(3x-1)}{(x-2)^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\frac{3(x-2)}{3x-1} - \ln(3x-1)}{(x-2)^2}}}$$

d) $f(x) = 2x^7$

$$El_x f(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$$

$$= 14x^6 \cdot \frac{x}{2x^7} = \underline{\underline{7}}$$

Dersom x øker med 1%, øker f(x) med 7%.

Oppgave 3

$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x$ definert for $[-4, 2]$

a) $f'(x) = 3x^2 + 3x - 6$

$f'(x) = 0$ gir $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3}$

$= \dfrac{-3 \pm \sqrt{81}}{6} = \dfrac{-3 \pm 9}{6}$

$\Rightarrow \underline{x_1 = 1} \vee \underline{x_2 = -2}$

Stasjonære punkt: $(x, y) = (1, -7/2)$

$(x, y) = (-2, 10)$

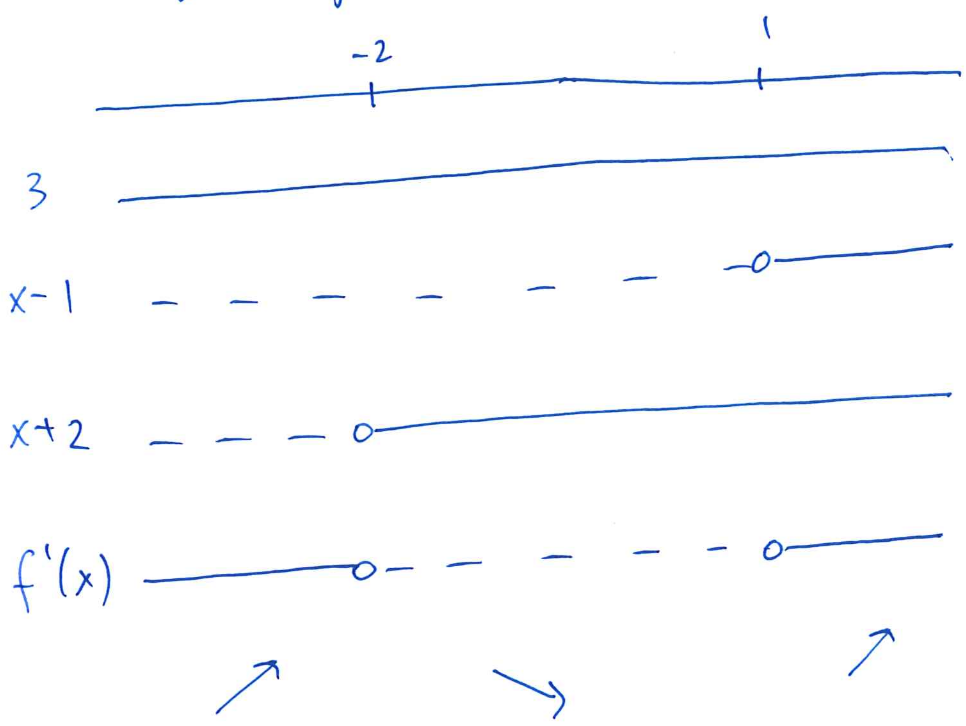
Begge punktene ligger i definisjonsområdet.

$f'(x)$ kan da skrives som:

$f'(x) = 3(x-1)(x+2)$

→

Fortegndiagram:



$(x,y) = (-2, 10)$ er lokalt maksimumspunkt.

$(x,y) = (1, -7/2)$ er lokalt minimumspunkt.

b) Sjekker funksjonsverdier i stasjonære punkt og endepunkt:

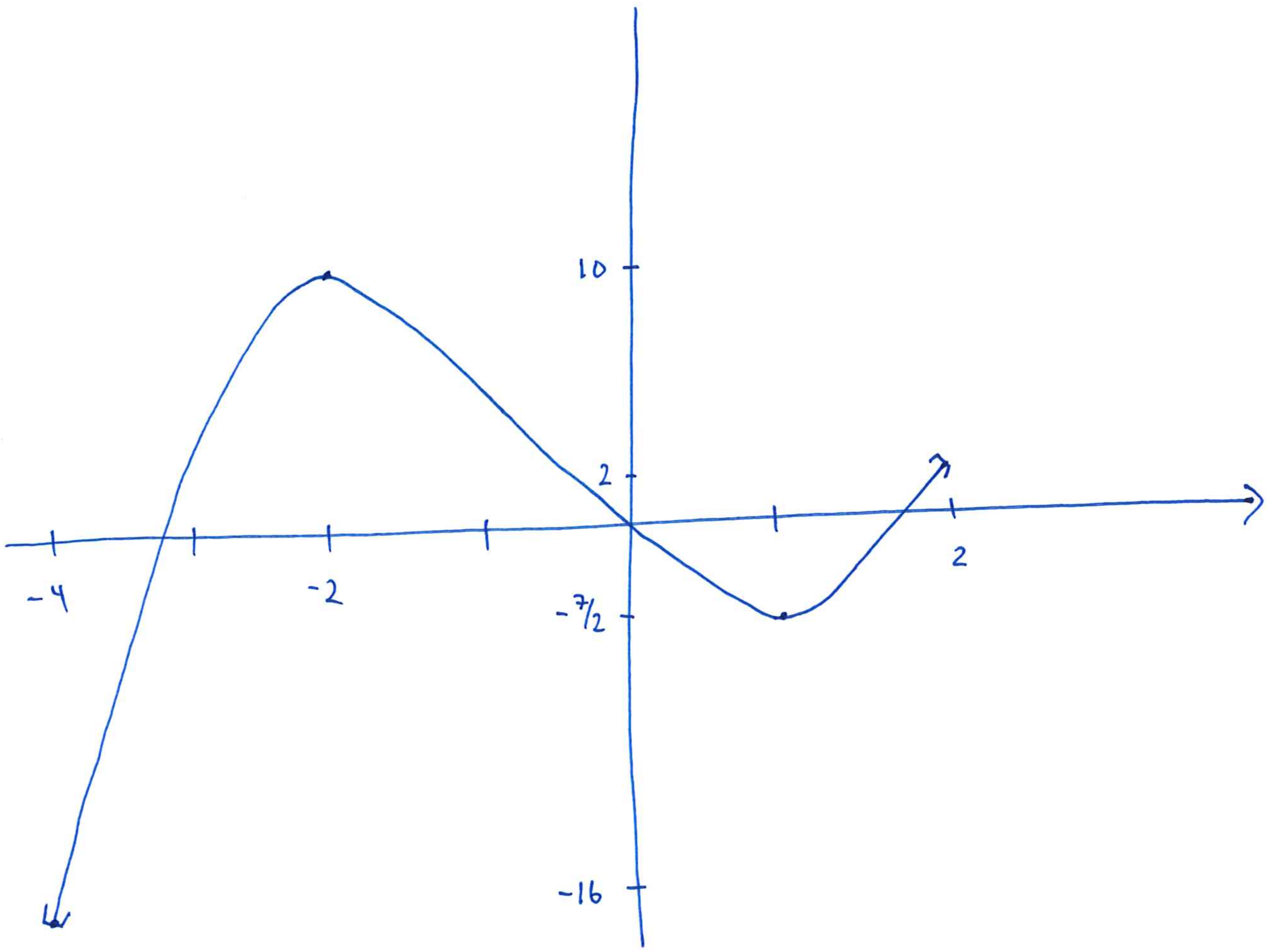
$f(-4) = -16$ → globalt min. punkt

$f(-2) = 10$ → globalt max punkt

$f(1) = -7/2$

$f(2) = 2$

c)



Oppgave 4

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}y^2 - 6xy + 11x$$

Stasjonære punkt:

$f_1'(x,y) = 0 \Rightarrow x^2 - 6y + 11 = 0$ (i)

$f_2'(x,y) = 0 \Rightarrow 3y - 6x = 0$ (ii)

(ii) gir $3y = 6x \Rightarrow y = 2x$ inn i (i)

→

(i) $x^2 - 6 \cdot 2x + 11 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 12x + 11 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{12 \pm 10}{2}$$

$\Rightarrow \underline{x = 11} \quad \vee \quad \underline{x = 1}$

To stasjonære punkt:

$(x, y) = (1, 2)$ og $(x, y) = (11, 22)$

(Husk at $y = 2x$)

Klassifisering:

$f''_{11}(x, y) = 2x \quad = A$

$f''_{12}(x, y) = -6 \quad = B$

$f''_{22}(x, y) = 3 \quad = C$

(x,y)	A	B	C	$AC-B^2$	Type punkt
$(1,2)$	2	-6	3	-30	Sadelpunkt
$(11,22)$	22	-6	3	30	Lokalt min

Oppgave 5

a) Max $U(x,y) = 5x^{1/4}y^{1/2}$

gitt at $px + qy = m$

$$\mathcal{L}(x,y) = 5x^{1/4}y^{1/2} - \lambda(px + qy - m)$$

Førsteordensbetingelser:

$$\mathcal{L}_1'(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{5}{4}x^{-3/4}y^{1/2} - \lambda p = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$\mathcal{L}_2'(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{5}{2}x^{1/4}y^{-1/2} - \lambda q = 0 \qquad \text{(ii)}$$

$$px + qy = m \qquad \text{(iii)}$$

Finner uttrykk for λ fra (i) og (ii):

$$(i) \quad \lambda = \frac{5/4\, x^{-3/4} y^{1/2}}{p}$$

$$(ii) \quad \lambda = \frac{5/2\, x^{1/4} y^{-1/2}}{q}$$

$$\Rightarrow \frac{5/4\, x^{-3/4} y^{1/2}}{p} = \frac{5/2\, x^{1/4} y^{-1/2}}{q}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} x^{-3/4} y^{1/2} q = \frac{5}{2} x^{1/4} y^{-1/2} p \qquad / \cdot x^{3/4}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} y^{1/2} q = \frac{5}{2} x y^{-1/2} p \qquad / \cdot y^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} y q = \frac{5}{2} x p$$

$$\Rightarrow y = \frac{2xp}{q} \quad \text{inn i (iii)}$$

(iii) $px + qy = m$

$$\Rightarrow px + q \cdot \frac{2xp}{q} = m$$

$$\Rightarrow px + 2xp = m$$

$$\Rightarrow 3px = m$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{m}{3p}}}$$

y-verdien følger da som:

$$y = \frac{2xp}{q}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2p}{q} \cdot \frac{m}{3p}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{2m}{3q}}}$$

Dvs: Når $(x, y) = \left(\frac{m}{3p}, \frac{2m}{3q}\right)$, har individet størst nytte.

b) La x^* og y^* være den optimale kombinasjonen:

$$x^* = \frac{m}{3p}$$

$$y^* = \frac{2m}{3q}$$

i) Økt p:

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = -\frac{m}{3p^2} < 0$$

Økt pris på vare 1 reduserer etterspørselen etter vare 1.

$$\frac{\partial y^*}{\partial p} = 0$$

Økt pris på vare 1 har ingen effekt på etterspørselen etter vare 2.

ii) Økt m:

$$\frac{\partial x^*}{\partial m} = \frac{1}{3p} > 0 \qquad \frac{\partial y^*}{\partial m} = \frac{2}{3q} > 0$$

Økt inntekt gir økt etterspørsel etter begge varene.