FASIT EKSAMEN SØK1001 VÅREN 2018

Oppg. 1

a) i) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 5$

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x$$

ii) $f(x) = (x^3 - \ln x^2)^5$

$$f'(x) = 5(x^3 - \ln x^2)^4 \cdot \left(3x^2 - \frac{1}{x^2} \cdot 2x\right)$$

$$= 5(x^3 - \ln x^2)^4 \cdot \left(3x^2 - \frac{2}{x}\right)$$

iii) $f(x) = e^{3x}(x^4 - 1)$

$$f'(x) = 3e^{3x}(x^4 - 1) + e^{3x} \cdot 4x^3$$

$$= e^{3x}\left(3x^4 - 3 + 4x^3\right)$$

iv) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 3}{1 - x^3}$

$$f'(x) = \frac{8x(1-x^3) - (4x^2-3)(-3x^2)}{(1-x^3)^2}$$

$$= \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(1-x^3)^2}$$

b) $x + y + 2z = 9$

$2x + 4y - 3z = 1$

$3x + 6y - 5z = 0$

Løsning av likningssystemet gir $x = 1$, $y = 2$ og $z = 3$.

c) $f(x,y) = \frac{4}{3} x^2 y - 2xy + 5y^3$

$f_1'(x,y) = \frac{8}{3} xy - 2y$

$f_2'(x,y) = \frac{4}{3} x^2 - 2x + 15y^2$

$f_{11}''(x,y) = \frac{8}{3} y$

$f_{22}''(x,y) = 30y$

$f_{12}''(x,y) = f_{21}''(x,y) = \frac{8}{3} x - 2$

d) $f(x) = \ln(3 - 2x)$

Def. mengde: $3 - 2x > 0$

$\Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow \underline{x < \frac{3}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{3-2x} \cdot (-2) = \underline{-\frac{2}{3-2x}}$

Oppg. 2

a)

i) $K_t = K_0 (1+r)^t$

$K_3 = 330\,000$, $K_0 = 300\,000$, $t = 3$ gir:

$$330\,000 = 300\,000 (1+r)^3$$

$$\Rightarrow (1+r)^3 = \frac{330\,000}{300\,000}$$

$$\Rightarrow 1+r = \left(\frac{330\,000}{300\,000}\right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow r = 0{,}0323$$

Ved årlig forrentning er den årlige renten lik 3,23%.

ii) $K_t = K_0 e^{rt}$

$K_3 = 330\,000$, $K_0 = 300\,000$, $t = 3$ gir:

$$330\,000 = 300\,000\, e^{3r}$$

$$\Rightarrow e^{3r} = \frac{330\,000}{300\,000}$$

$$\Rightarrow 3r = \ln\left(\frac{330\,000}{300\,000}\right)$$

$$\Rightarrow r = 0{,}0318$$

ɔ: Ved kontinuerlig forrentning er renten lik 3,18%

b)

i) $$\text{Nåverdi} = 9000 + \underbrace{\frac{2000}{1{,}02^2} + \frac{2000}{1{,}02^3} + \dots + \frac{2000}{1{,}02^{11}}}_{\text{Endelig geometrisk rekke der}}$$

$$a_1 = \frac{2000}{1{,}02^2}, \quad k = \frac{1}{1{,}02} \quad \text{og} \quad n = 10$$

$$\Rightarrow \text{Sum} = a_1 \frac{1-k^n}{1-k} = \frac{2000}{1{,}02^2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1{,}02}\right)^{10}}{1-\frac{1}{1{,}02}}$$

$$= 17612{,}91$$

$$\Rightarrow \text{Nåverdi} = 9000 + 17612{,}91 = \underline{26612{,}91}$$

ii) $$\text{Nåverdi} = \underbrace{3000 + \frac{3000}{1{,}02} + \frac{3000}{1{,}02^2} + \frac{3000}{1{,}02^3} + \frac{3000}{1{,}02^4}}_{\text{Endelig geometrisk rekke der}}$$

$$a_1 = 3000, \quad k = \frac{1}{1{,}02}, \quad n = 5$$

$$\Rightarrow \text{Sum} = 3000 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1{,}02}\right)^5}{1-\frac{1}{1{,}02}} = \underline{14423{,}19}$$

$$+ \underbrace{\frac{2000}{1{,}02^5} + \dots + \frac{2000}{1{,}02^{11}}}_{\text{Endelig geometrisk rekke der}}$$

$$a_1 = \frac{2000}{1{,}02^5}, \quad k = \frac{1}{1{,}02}, \quad n = 7$$

$$\Rightarrow \text{Sum} = \frac{2000}{1{,}02^5} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1{,}02}\right)^7}{1-\frac{1}{1{,}02}} = \underline{11958{,}24}$$

$$\Rightarrow \text{Nåverdi} = 14423{,}19 + 11958{,}24 = \underline{26381{,}43}$$

Alternativ i) har høyest nåverdi og er derfor mest lønnsomt.

Oppg. 3

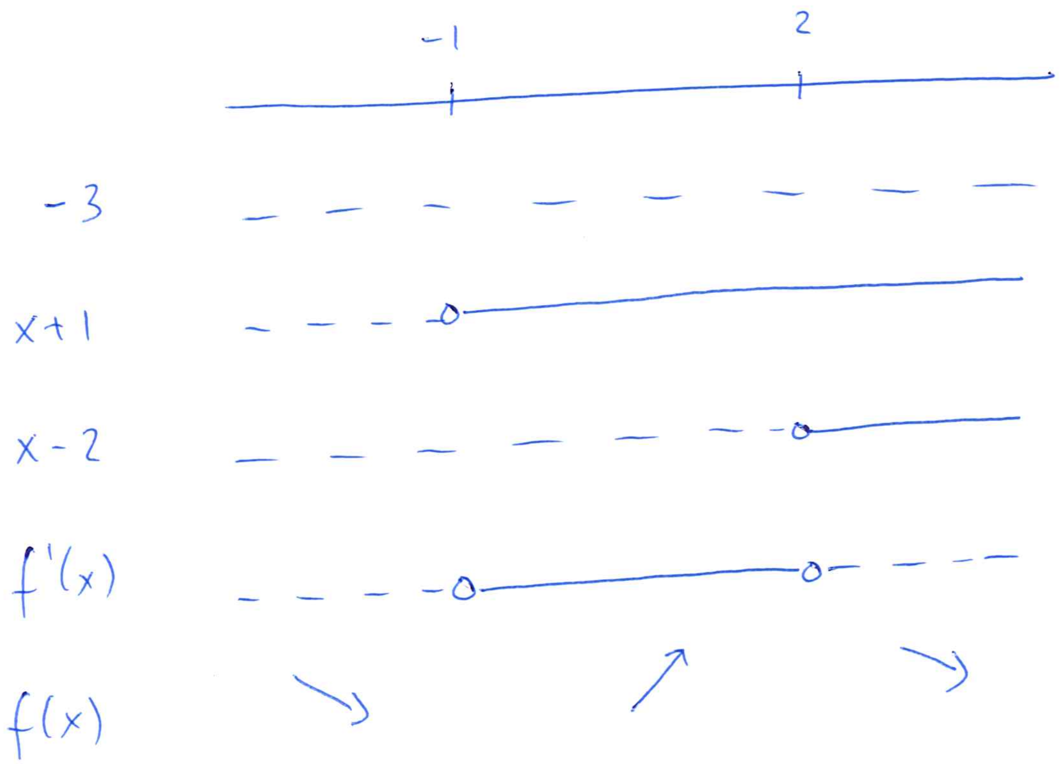
$f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x$ definert for $[-4, 3]$

a) $f'(x) = -3x^2 + 3x + 6$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1 \vee x = 2$ (Begge ligger i def.området)

Stasjonære punkt: $(x,y) = (-1, -7/2)$ og $(x,y) = (2, 10)$

Faktoriserer $f'(x)$: $f'(x) = -3(x+1)(x-2)$



$(x,y) = (-1, -7/2)$ er et lokalt minimumspunkt

$(x,y) = (2, 10)$ er et lokalt maksimumspunkt

b) $f(-4) = 64$

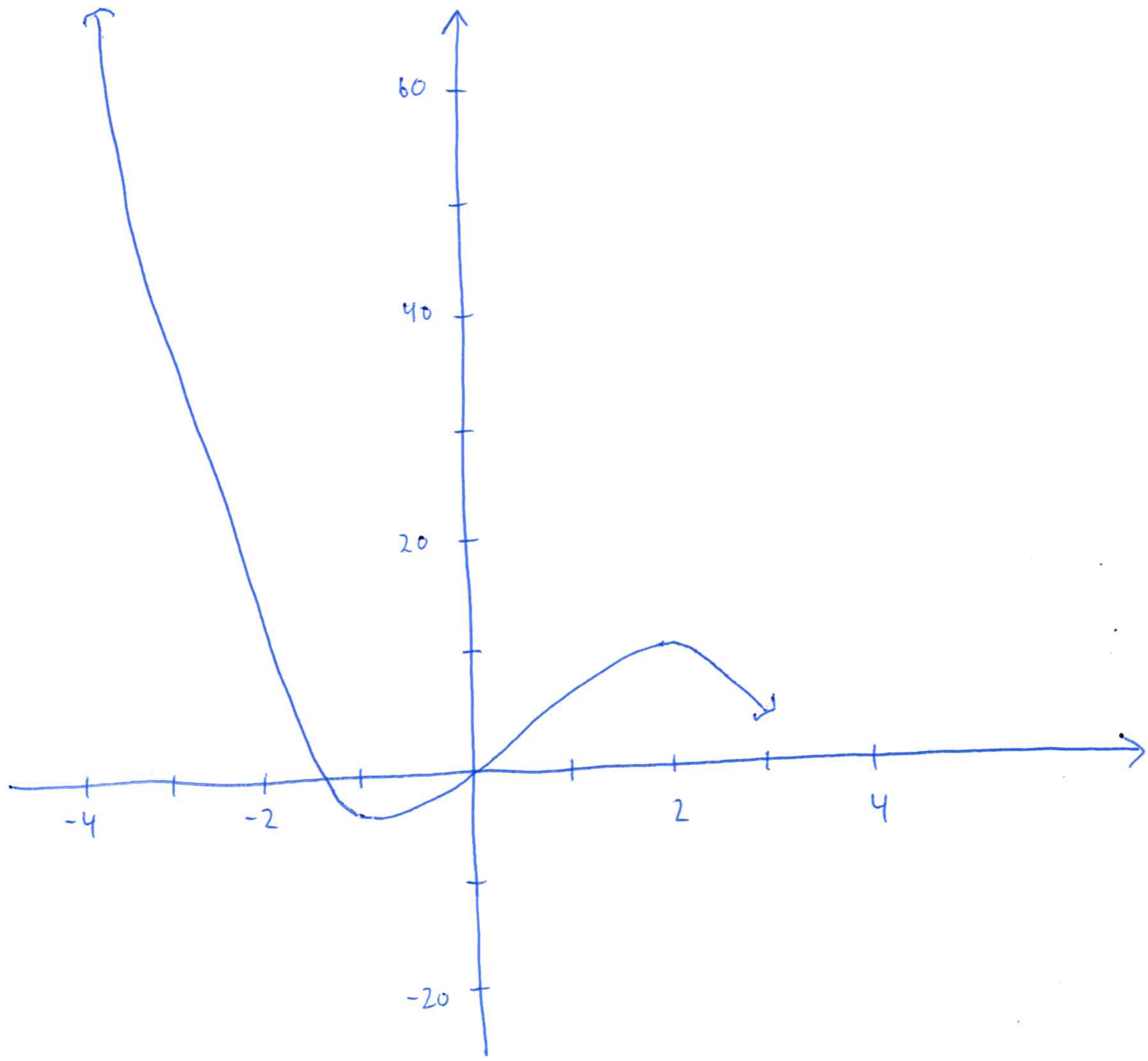
$f(-1) = -7/2$

$f(2) = 10$

$f(3) = \frac{9}{2}$

Globalt max for $x = -4$ og globalt min for $x = -1$

c)



Oppg. 4

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y + 3y^2$$

$$f_1'(x,y) = 3x^2 + 6xy$$

$$f_2'(x,y) = 3x^2 + 6y$$

Stasjonære punkt:

$$3x^2 + 6xy = 0 \qquad (i)$$

$$3x^2 + 6y = 0 \qquad (ii)$$

Fra (ii): $y = -\frac{1}{2}x^2$ inn i (i):

$$3x^2 + 6x\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 - 3x^3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2(1-x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = 1$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$y = 0 \qquad\qquad y = -\frac{1}{2}$$

To stasjonære punkt: $(x,y) = (0,0)$ og $(x,y) = \left(1, -\frac{1}{2}\right)$.

Klassifisering:

$$f''_{11}(x,y) = 6x + 6y = A$$

$$f''_{12}(x,y) = 6x = B$$

$$f''_{22}(x,y) = 6 = C$$

(x,y)	A	B	C	$AC-B^2$	Type punkt
$(0,0)$	0	0	6	0	?
$(1,-\frac{1}{2})$	3	6	6	-18	Sadelpunkt

For punktet $(x,y) = (0,0)$ gir testen ingen konklusjon.
$(x,y) = (1, -\frac{1}{2})$ er et sadelpunkt.

Oppg. 5

$$2x^2 - 2xy + y^2 = 8$$

a) Skjæring med 1. aksen:

$y = 0$ gir $2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$(2,0)$ og $(-2,0)$

Skjæring med 2. aksen:

$x = 0$ gir $y^2 = 8 \Rightarrow y = \pm\sqrt{8} \approx \pm 2,8$

$(0, \sqrt{8})$ og $(0, -\sqrt{8})$

b) $4x - (2y + 2xy') + 2yy' = 0$

$4x - 2y - 2xy' + 2yy' = 0$

$(2y - 2x)y' = 2y - 4x$

$$y' = \frac{2y - 4x}{2y - 2x}$$

$$y' = \frac{y - 2x}{y - x}$$

c) $y' = 0$ gir $y = 2x$ (i)

I tillegg må punktet ligge på kurva:

$2x^2 - 2xy + y^2 = 8$ (ii)

Sett (i) inn i (ii):

$2x^2 - 2x \cdot 2x + (2x)^2 = 8$

$\Rightarrow 2x^2 - 4x^2 + 4x^2 = 8$

$\Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$x = 2$ gir $y = 2 \cdot 2 = 4$

$x = -2$ gir $y = 2 \cdot (-2) = -4$

To punkt med horisontal tangent:

$(x, y) = (2, 4)$ og $(x, y) = (-2, -4)$

d) $y' \to \infty$ gir $y = x$ (i)

I tillegg må punktet ligge på kurva:

$2x^2 - 2xy + y^2 = 8$ (ii)

Sett (i) inn i (ii):

$2x^2 - 2x^2 + x^2 = 8$

$\Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8} \approx \pm 2,8$

$x = \sqrt{8}$ gir $y = \sqrt{8}$

$x = -\sqrt{8}$ gir $y = -\sqrt{8}$

To punkt med vertikal tangent:

$(x, y) = (\sqrt{8}, \sqrt{8})$ og $(x, y) = (-\sqrt{8}, -\sqrt{8})$