1) a) Her betegner U konsumentens nyttefunksjon, en funksjon som angir konsumentens nytte av å konsumere x_1 av gode 1 og X_2 av gode 2.

Når vi konstruerer en nyttefunksjon $U(x_1, x_2)$, har vi gjort følgende antakelser om konsumentens preferanser:

(1) De er komplette, dvs. alle godekombinasjoner kan rangeres

(2) De er transitive, dvs. at for arbitrære godekombinasjoner a, b og c holder implikasjonen
$$(U_a > U_b \text{ og } U_b > U_c) \Rightarrow U_a > U_c$$

(3) Ikke-metning, dvs. mer av et gode gir større nytte, alt annet likt (c.p.).

(4) Preferansene er ordinale, dvs. at nyttefunksjonen kun kan rangere godekombinasjonene. Vi kan dermed ikke si at kombinasjon a er "dobbelt så god" som kombinasjon b selv om $U_a = 2U_b$.

U_1 er konsumentens marginalnytte av gode 1 (i oppgaveteksten står det gode x_1, men jeg velger å la x_1 betegne mengden konsumert av gode 1), dvs. $U_1(x_1, x_2) = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1}$.

Tilsvarende er $U_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2}$.

Tolkningen av marginalnyttene er at de angir hvor mye konsumentens nytte endrer seg når ~~k~~ konsumenten oppnår en infinitesimal endring i mengde av ett av godene.

Før jeg fortsetter med tolkningen av $\frac{U_1}{p_1} = \frac{U_2}{p_2}$, har jeg behov for å definere et par begreper jeg vil bruke i tolkningen kort.

I tillegg kommer indifferens-kurver nesten alltid mot origo, men de kan være lineære hvis godene er perfekte substitutter.

Konsumentens <u>indifferenskurver</u> er nivåkurver til nyttefunksjonen U, og viser altså kombinasjoner av goder som gir konsumenten samme nytte. Forutsetningene vi gjorde om nyttefunksjonen/preferansene på forrige side legger noen føringer for hvordan indifferenskurvene kan se ut: (2) innebærer bl.a. at de ikke kan krysse hverandre, og (3) innebærer at indifferenskurver lenger ut i (x_1, x_2)-planet svarer til høyere nytte (m.a.o.: nytten øker mot "nordøst" i et (x_1, x_2)-diagram).

Den <u>marginale substitusjonsbrøken</u> (MSB) angir helningen til indifferenskurven i punktet vi ser på, og sier dermed hvor mye av gode 2 konsumenten er villig til å oppgi for én ekstra enhet av gode 1. MSB er alltid positiv selv om indifferenskurver alltid har negativ helning (positiv helning strider mot antakelse (3) om ikke-metning),

$$MSB = -\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{U=\bar{U}}$$

Siden nytten er konstant langs en indifferenskurve, har vi dessuten

$$dU = U_1 dx_1 + U_2 dx_2 = 0 \iff \frac{U_1}{U_2} = -\frac{dx_2}{dx_1} = MSB.$$

Til slutt definerer jeg kort begrepet <u>budsjettlinje</u>, som er en linje i (x_1, x_2)-planet som begrenser konsumentens mulighetsområde (altså alle godekombinasjoner konsumenten kan velge). Hvis konsumenten har inntekt m, er budsjettlinja en linje i (x_1, x_2)-planet som skjærer x_2-aksen i $(0, \frac{m}{p_2})$ og x_1-aksen i $(\frac{m}{p_1}, 0)$, og som har helning $-\frac{p_1}{p_2}$, der p_i = pris på gode i ($i = 1, 2$).

Nå er vi klare til å tolke tilpasningen $\frac{U_1}{p_1} = \frac{U_2}{p_2}$. Først av alt kan vi si at det er intuitivt at dette maksimerer nytten, ettersom tilpasningen sier at nytteøkningen ved én ekstra enhet av 1 delt på prisen (kostnadsøkningen) av 1 er lik nytteøkningen av én ekstra enhet av 2 delt på kostnadsøkningen av én ekstra enhet av 2.

Men vi kan også omforme $\frac{U_1}{p_1} = \frac{U_2}{p_2}$ til

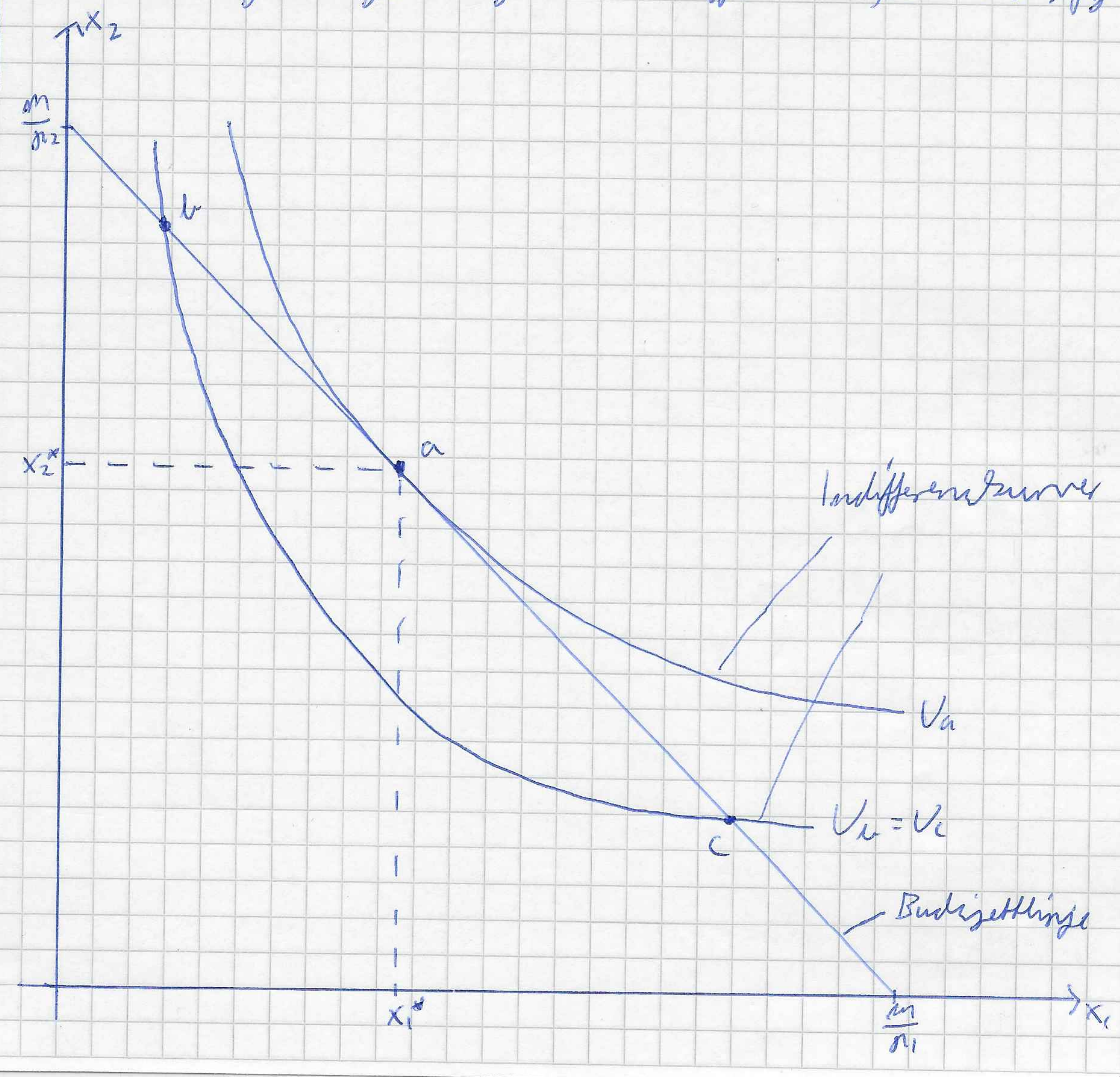
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Langs en indiff.kurve har vi sett at $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{U_1}{U_2}$, så tilpasningen innebærer at

$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1}{p_2}$, som også er helningen til budsjettlinja! Altså er den optimale tilpasningen i et punkt der tangenten til indifferenskurven er parallell med budsjettlinja. Merk at betingelsen $\frac{U_1}{p_1} = \frac{U_2}{p_2}$ bare sier at tangenten til indiff.-kurva

skal være parallell med budsjettlinja, ikke at budsjettlinja nødvendigvis må tangere indiff.-kurva. Men antakelsen om ikke-metning gir at den optimale tilpasningen må være et punkt på budsjettlinja, siden ~~tanger~~ alle punkt utenfor budsjettlinja er uoppnåelige og alle punkt innenfor vil innebære mindre av det ene godet og like mye av det andre sammenliknet med et punkt på budsjettlinja.

Kombinasjonen av $\frac{U_1}{p_1} = \frac{U_2}{p_2}$ og $m = p_1 x_1 + p_2 x_2$ gir at den optimale tilpasningen er i punktet der budsjettlinja tangerer en indiff.-kurve, som vist i figur.



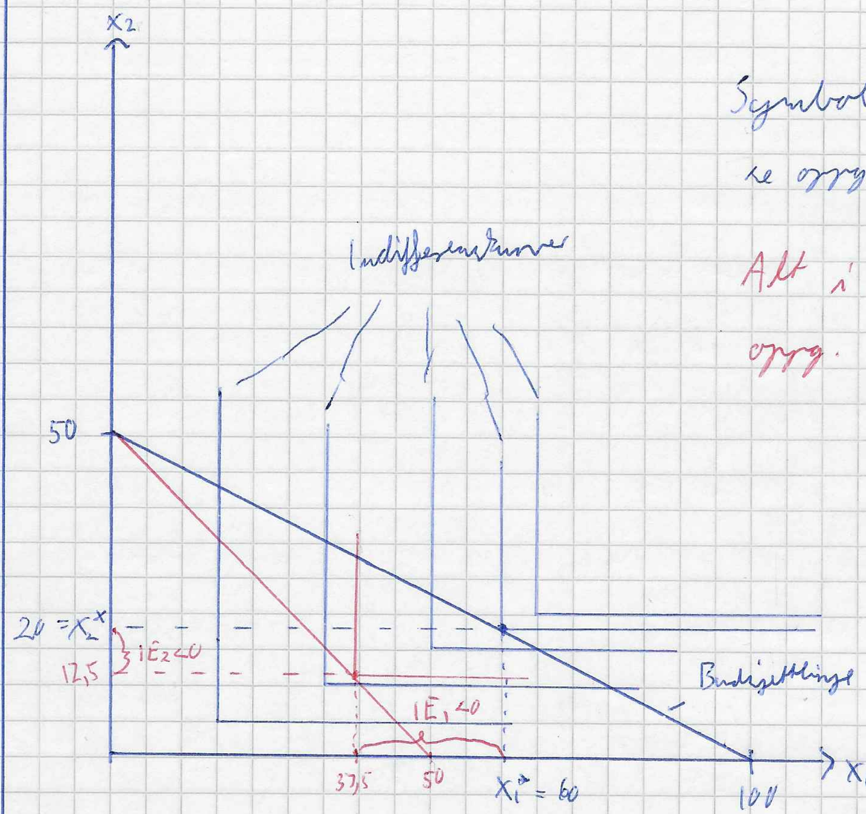
I figuren på forrige side er symbolene som beskrevet tidligere i oppgaven, og $U_a > U_b$.
Merk at tilpasningen b er mulig, men suboptimal. Vi ser at i b er $MSB > \frac{p_1}{p_2}$, som betyr at konsumenten er villig til å gi fra seg mer av gode 2 for å oppnå én ekstra enhet av gode 1 enn hun faktisk må i markedet, og det vil derfor være optimalt å substituere seg vekk fra b (langs budsjettlinjen mot mer av gode 1). Dette resonnementet vil holde helt til konsumenten er i punkt a, og et tilsvarende resonnement (men med substitusjon mot mer av gode 2) vil gjelde hvis konsumenten opprinnelig har valgt kombinasjon c.

For øvrig kan betingelsen $\frac{U_1}{p_1} = \frac{U_2}{p_2}$ også finnes matematisk ved bruk av Lagrangefunksjonen

$$\mathcal{L} = U(x_1, x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m).$$

b) Her har vi komplementære goder, og nyttefunksjonen blir $U = \min(x_1, 3x_2)$.

Indiff.-kurvene blir rette vinkler.



Symboler som før, se oppg. 1a)

Alt i rødt tilhører oppg. 1c)

$m = p_1 x_1 + p_2 x_2$

$100 = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \iff x_1 = 100 - 2x_2$

Vi har også $x_1 = 3x_2$, siden dette er konsumentens preferanse. Innsatt gir det

$3x_2 = 100 - 2x_2$

$x_2^* = \frac{100}{5} = \underline{\underline{20}}$

$x_1^* = 100 - 2x_2^* = 100 - 2 \cdot 20 = \underline{\underline{60}}$

Dersom både inntekten og begge prisene øker med 30%, får vi ingen endring i figuren eller i x_1^* eller x_2^*.

Vi får

$$1{,}3m = 1{,}3p_1x_1 + 1{,}3p_2x_2 \quad \Big| : 1{,}3$$

$m = p_1x_1 + p_2x_2$, som var det vi hadde før pris- og inntektsøkningen. Vi får derfor fortsatt $x_1^* = 60$, $x_2^* = 20$.

Figuren på forrige side illustrerer altså begge tilfeller.

c) Nå får vi

$$100 = 2x_1 + 2x_2 \iff x_1 = 50 - x_2 .$$

$$3x_2 = x_1 = 50 - x_2 \iff 4x_2 = 50 \iff \hat{x}_2^* = \underline{\underline{12{,}5}},$$

$$\hat{x}_1^* = 3x_2^* = \underline{\underline{37{,}5}}$$

Nøkkelen her er at vi ikke har noen substitusjons-effekt fordi godene er fullstendig komplementære.

Dermed har vi $IE_1 = \hat{x}_1^* - x_1^* = 37{,}5 - 60 = \underline{\underline{-22{,}5}}$,

$IE_2 = \hat{x}_2^* - x_2^* = 12{,}5 - 20 = \underline{\underline{-7{,}5}}$,

$SE_1 = SE_2 = \underline{\underline{0}}$

Siden begge inntektseffektene er ~~normale~~ negative, er begge godene normale.

Den nye budsjettlinja og tilpasningen er illustrert i rødt i figuren på forrige side.
Merk at hvis den nye (røde) budsjettlinja parallellforskyves til den treffer opprinnelig

indifferenskurve, treffer den fortsatt i punktet (60, 20).
Dette er også en måte å se at $SE_1 = SE_2 = 0$.

d) Se 1a) for definisjon av MSB.

$$MSB = \frac{U_1}{U_2} \quad \text{(også utledet i 1a)}$$

$$MSB = \frac{U_1}{U_2} = \frac{a x_1^{a-1} x_2^{1-a}}{(1-a) x_1^{a} x_2^{1-a-1}} = \frac{a}{1-a} \cdot x_1^{a-1-a} \, x_2^{1-a-(-a)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{a}{1-a} \cdot \frac{x_2}{x_1}}}$$

Vi ser at jo større a er, jo brattere blir indifferenskurvene (siden $MSB = -\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{U=\bar{U}}$),

og jo mer villig er konsumenten til å substituere seg vekk fra x_2 mot x_1 for gitte kvanta x_1 og x_2.

C.p. gjør altså større a at konsumenten foretrekker gode 1 mer relativt til gode 2.

2) a) Denne oppgaven kan ikke løses uten å gjøre noen antakelser, men basert på informasjonen om at bedriften minimerer kostnader, vet vi at vi kan anta at bedriften velger en optimal tilpasning gitt de eksogene forhold.

Vi lar produsert kvantum y være en funksjon av innsatsfaktorene arbeidskraft L og realkapital K,

$$y = f(L, K).$$

For et gitt produksjonsnivå $\hat{y}$ vil bedriften minimere kostnadene $C = wL + rK$, der w og r er hhv. prisen pr. enhet arbeidskraft og realkapital.

Vi kan løse minimeringsproblemet ved å sette opp Lagrangefunksjonen

$$\mathcal{L} = wL + rK - \lambda(\hat{y} - f(L,K))$$ og løse førsteordensbetingelsene.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = w + \lambda f_L \qquad \left(\text{der } f_L \equiv \frac{\partial f(L,K)}{\partial L}\right)$$

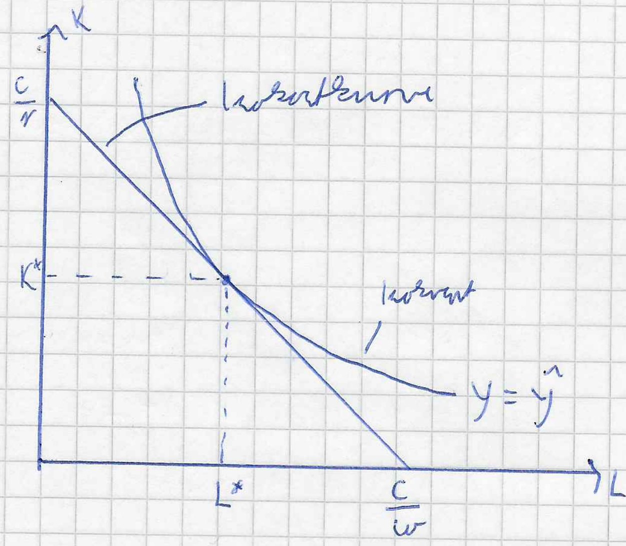
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = r + \lambda f_K$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \implies w + \lambda f_L = \cancel{r + \lambda f_K} \; 0$$

$$\cancel{\frac{w}{r}} \iff \lambda = -\frac{w}{f_L}$$

$$r - \frac{w}{f_L} \cdot f_K = 0 \iff \frac{w}{r} = \frac{f_L}{f_K}$$

Grafisk innebærer dette at en <u>isokostkurve</u> (linje i (L,K)-planet som angir kombinasjoner av innsatsfaktorer med samme kostnad) tangerer isokvanten (kurve i (L,K)-planet som angir kombinasjoner av innsatsfaktorer som gir samme produksjonsnivå, altså en nivåkurve til $f(L,K)$) til det valgte produksjonsnivået $\hat{y}$:



Et analogt resonnement som i oppg. (a) kan føres her (hvis helningen til isokvanten og isokostkurven er ulike, kan bedriften redusere kostnader ved å substituere mellom innsatsfaktorene), men siden jeg alt har utledet $\frac{w}{r} = \frac{f_L}{f_K}$ vha. Lagrange <u>og</u> jeg gjorde et tilsvarende resonnement i (a), utdyper jeg ikke mer her, bortsett fra å bemerke at isokvanten her er analog med budsjettlinja i (a) (siden de begge er faste/eksogene) og isokostkurva er analog med indiff.-kurva i (a) (beslutningstakeren prøver å havne på en så lav isokostkurve / så høy indiff.-kurve som mulig.

Vi har altså funnet at i den optimale tilpasningen er $\frac{w}{r} = \frac{f_L}{f_K}$, og vi vet at bedriften velger denne tilpasningen siden vi har fått oppgitt at den minimerer kostnadene.

Vi ønsker å finne f_L, altså hvor mye mer bedriften kan produsere ved å bruke én ekstra time arbeidskraft (marginalproduktet til arbeidskraft).

$$f_L = f_K \cdot \frac{w}{r} = 15 \cdot \frac{350}{70} = \underline{75}$$

<u>Bedriften kan produsere 75 ekstra enheter ved å bruke én ekstra time arbeidskraft</u>

b) Skalaegenskapene til en produksjonsprosess sier noe om hvor mye produksjonen endres når mengden innsatsfaktorer endres.

La $y = f(L, K)$ (symboler som i 2a)).

Dersom $f(zL, zK) > z \cdot f(L, K)$, sier vi at vi har økende skalautbytte, dvs. produksjonen endres prosentvis mer enn endringen i innsatsfaktorer. Slike skalaegenskaper kan vi f.eks. se når store investeringer er nødvendige for å komme i gang – det er f.eks. rimelig å anta at antall togavganger har slike skalaegenskaper (jernbanenettet må på plass selv for én togavgang, så kostnadsøkningen fra 0 til 1 avganger vil være mye større enn den fra 100 til 101).

Dersom $f(zL, zK) < zf(L, K)$, sier vi at vi har avtakende skalautbytte. Det er forenlig med f.eks. arbeidere på en åker med gitt størrelse - flere arbeidere øker produktiviteten, men åkerens areal utgjør en "flaskehals" som gjør at hver arbeiders ekstra produktivitet blir lavere jo flere arbeidere det er.

Dersom $f(zL, zK) = zf(L, K)$, har vi konstant skalautbytte, dvs. produksjonen endres prosentvis like mye som endringen i innsatsfaktorer.
En vanlig økonomisk tolkning er at konstant skalautbytte gjelder på lang sikt, og at den aktuelle bedriften dermed har tid til å tilpasse seg. Alle faktorer kan endres proporsjonalt, slik at omsetningen blir etterspørselsbestemt og profitten blir 0 (eller sagt på en annen måte, kapitalen gir normalavkastning).

Med $y = K^{0,5}L^{0,5}$ har vi

$$f(zL, zK) = (zK)^{0,5}(zL)^{0,5} = z^{0,5+0,5}K^{0,5}L^{0,5} = zK^{0,5}L^{0,5}.$$

Altså konstant skalautbytte.

c) Med $y = K^{0,5} L^{0,5}$ har vi $f_L = \frac{1}{2} K^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}}$,

$f_K = \frac{1}{2} K^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$.

Utledet i 2a) at kostnadene er minimert når $\frac{f_L}{f_K} = \frac{w}{r}$.

$$\frac{w}{r} = \frac{\frac{1}{2} K^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} K^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}} = \frac{K}{L} \quad (*)$$

Vi har også likningen $\tilde{y} = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow L = \frac{\tilde{y}^2}{K}$. Innsatt i $(*)$ gir det

$$\frac{w}{r} = \frac{K}{\frac{1}{K} \tilde{y}^2} = \frac{K^2}{\tilde{y}^2}$$

$$K^* = \sqrt{\tilde{y}^2 \frac{w}{r}} = \underline{\underline{\tilde{y} \cdot \left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{2}}}}$$

$$L^* = \frac{\tilde{y}^2}{K^*} = \underline{\underline{\tilde{y} \cdot \left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}}}}$$

Merk at $K = -\sqrt{\tilde{y}^2 \frac{w}{r}}$ ikke er en gyldig løsning selv om det rent matematisk er mulig, ettersom K ikke kan være negativ (og tilsvarende for L).

$$\frac{\partial L^*}{\partial y} = \left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}} > 0$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial r} = \frac{1}{2\sqrt{w \cdot r}} > 0$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial w} = r^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2} w^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{r^{\frac{1}{2}}}{2 w^{\frac{3}{2}}} < 0$$

Vi ser altså at økt produksjon og økt ~~etterspørsel~~ pris på kapital øker etterspørselen etter arbeidskraft, mens økt pris på arbeidskraft (naturlig nok) reduserer etterspørselen etter arbeidskraft.

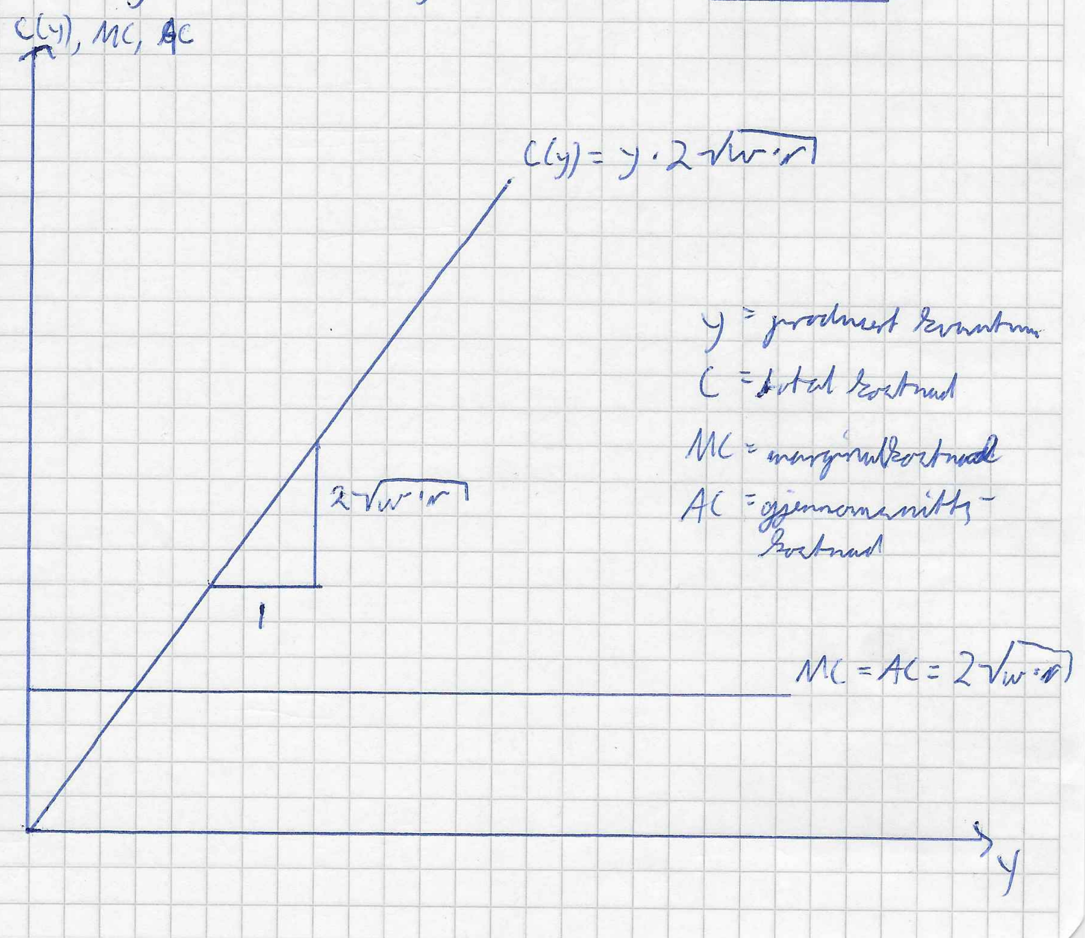
d) På lang sikt kan både L og K varieres, og vi får

$$\cancel{C(y) = C(y(L^*, K^*))}$$

$$\cancel{y(L^*, K^*) = \left(y\left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(y \cdot \left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = y}$$

$$C(y) = w \cdot L^* + r \cdot K^*$$

$$= y\sqrt{r \cdot w} + y \cdot \sqrt{w \cdot r} = \underline{\underline{2y\sqrt{w \cdot r}}}$$



Marginalkostnaden er $MC = C'(y) = \underline{\underline{2\sqrt{w \cdot r}}}$

Gjennomsnittskostnadene er $AC = \frac{C(y)}{y} = 2\sqrt{w \cdot r} = MC$.

Vi ser at $MC = AC$ for alle y. Slik er det alltid i produksjonsprosesser med konstant skalautbytte.

Merk at hvis vi setter inn tall fra 2a), får vi $C(y) = 2\sqrt{350 \cdot 70} \cdot y \approx 313y$,

og $MC = AC \approx 313$ kr/enhet.

e) Med fast realkapital K_0 blir skalaegenskapene avtagende,

$$f(kL) = K_0^{0,5} \cdot (k \cdot L)^{0,5} = k^{\frac{1}{2}} K_0^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} = k^{\frac{1}{2}} f(L),$$

som er større enn $k f(L)$ når $0 \leq k < 1$ og mindre enn $k f(L)$ når $k > 1$ (en økning i L øker altså y prosentvis mindre).

~~Betingelsen $\frac{w}{r} = \frac{K_0}{L}$ (utledet i 2a) og 2c)) gjelder ~~imidlertid~~ fortsatt når bedriften~~

Bedriftens profitt er gitt ved

$$\Pi(y) = p \cdot y - C(y).$$

Denne er maksimert når $\Pi'(y) = 0$, ettersom

$\pi''(y) = -C''(y) < 0$ siden $C''(y) > 0$

når skalautbyttet er avtakende.

$\pi'(y) = 0$

$p = C'(y)$ (antar at bedriften er en pristaker, slik at $p'(y) = 0$)

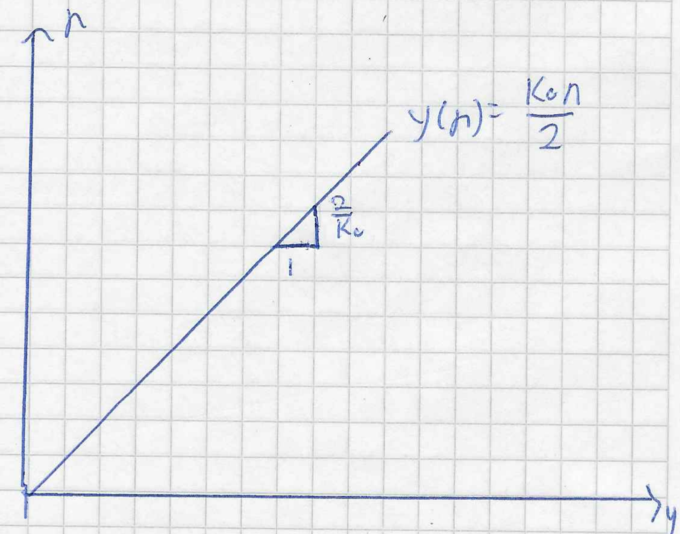
På kort sikt er $C(y) = r \cdot K_0 + w \cdot L^*$

~~$= r \cdot K_0 + \ldots$~~

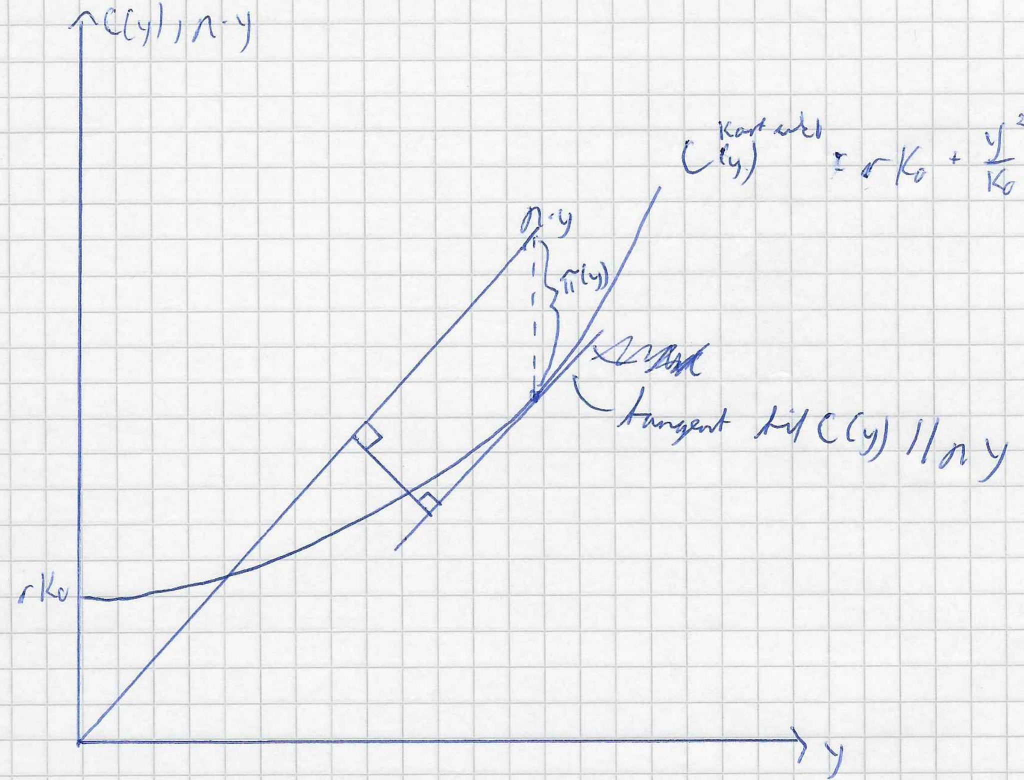
$= r \cdot K_0 + \frac{y^2}{K_0}$ $\left(L^* = \frac{y^2}{K},\ \text{se } 2c)\right)$

$C'(y) = 2y \cdot \frac{1}{K_0} = p$ (profittmaksimering)

$\Rightarrow y = \underline{\underline{\frac{K_0 p}{2}}}$



Merk for øvrig at betingelsen $C'(y) = p$ også kan illustreres grafisk.



Vi ser at profitten er maksimert når $MC = p$, dvs. når tangenten til $C(y)$ er parallell med $p \cdot y$ $(\Rightarrow p = C'(y))$.