1)

## Oppgave 1

a) Sharpe-raten viser hvor mye ekstra forventet avkastning man kan forvente ved å ta på seg en ekstra enhet av standardavvik. (complett portefølje.)

Complett portefølje: $y$ = andel i markedsporteføljen

$$E[r_c] = yE[r_m] + (1-y) \cdot r_f$$

$$= y(E[r_m] - r_f) + r_f$$

$$\sigma_p^2 = Var(yE[r_m] + (1-y) \cdot r_f)$$

$$\sigma_p^2 = y^2 \sigma_m^2$$

$$\sigma_p = y\sigma_m \Rightarrow y = \frac{\sigma_p}{\sigma_m}$$

$$E[r_c] = \frac{\sigma_p}{\sigma_m}(E[r_m] - r_f) + r_f$$

$$S = \frac{E[r_m] - r_f}{\sigma_m}$$

For en ekstra enhet standardavvik, $\sigma_p$ så kan man forvente at avkastningen skal øke med $S$.

b) Vi kan ta forventet avkastning av avkastningen til aksje $i$.

$$E[\tilde{r}_i] = E(r_f + (\tilde{r}_m - r_f)\beta_i + \tilde{\varepsilon}_i)$$

$$E[\tilde{r}_i] = E[r_f] + (E[\tilde{r}_m] - E[r_f])\beta_i + E[\tilde{\varepsilon}_i]$$

$$E[\tilde{r}_i] = r_f + (E[\tilde{r}_m] - r_f)\beta_i + 0$$

Forventet avkastning $E(r_i)$ på aksje $i$ er $r_f + (E[r_m] - r_f)\beta_i$.
Dette er formelen for CAPM, Capital asset price management, som viser en linear sammenheng mellom $E[r_i]$ og $\beta_i$

Vet at:
$E[r_f] = r_f$
$E[\tilde{\varepsilon}_i] = 0$

c) $\cancel{Var(E[r_i])} =$ La $E[\tilde{r}_m] - r_f$ være $m$ meravkastningen markedsporteføljen gir.

$$Var(r_i) = Var(r_f + m\beta_i + \tilde{\varepsilon}_i) \qquad \sigma_{\tilde{r}_m \tilde{e}_i} = 0$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma^2_{(\varepsilon_i)}$$

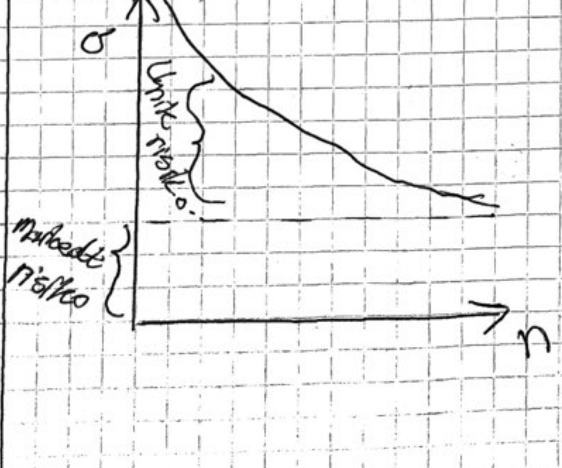
$r_f$ = risikofritt
$\sigma_f^2 = 0$

Total risiko = Systematisk risiko + Usystematisk risiko

d) $\beta_i^2 \sigma_m^2$ = systematisk risiko også kalt markedsrisikoen. Dette er en risiko man ikke klarer (vanskelig) å få fjernet med å diversifisere. Eksempel er hvis det blir krig eller verdenen går under. Dette er en risiko som man ikke blir kvitt ved diversifisering.

$\sigma^2_{\varepsilon_i}$ = Usystematisk risiko også kalt unik risiko eller selskap spesifikk risiko. Dette er risiko som er mulig å ~~å~~ redusere ved å diversifisere.

Disse risikoene kan vises ved en figur. x-akse = antall aksjer holdt i portefølje. y-akse = standardavvik.




Man blir betalt å ta på seg unik risiko, men ikke markeds risiko.

e) ~~Vi bruker Sharpe-raten til aksje~~

Vi bruker forventet avkastning for aksje $i$.

$$E[r_i] = r_f + (E[r_m] - r_f)\beta_i$$

$$E[r_i] - r_f = (E[r_m] - r_f)\beta_i \qquad \beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$$

$$E[r_i] - r_f = (E[r_m] - r_f)\frac{\rho_{im}\cancel{\sigma_m}\sigma_i}{\sigma_m^{\cancel{2}}} \qquad \sigma_{im} = \rho_{im}\sigma_m\sigma_i$$

$$\frac{(E[r_i] - r_f)}{\sigma_i} = \frac{\rho_{im}(E[r_m] - r_f)}{\sigma_m}$$

$$\underline{\underline{S_i = \rho_{im} \cdot S_m}}$$

Sharpe-raten til aksje $i$ er lik korrelasjonskoeffisienten mellom aksje $i$ og markedsporteføljen ganger Sharpe-raten til markedsporteføljen.

f) $$S_i = \frac{(E[r_i] - r_f)}{\sigma_i} \qquad \sigma_i^2 = \beta_i^2\sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2$$

$$\sigma_i = \beta_i\sigma_m + \sigma_{\varepsilon_i}$$

Ser at

$$\underline{\underline{S_i = \frac{(E[r_i] - r_f)}{\beta_i\sigma_m + \sigma_{\varepsilon_i}}}}$$

↳ Hvis $\sigma_\varepsilon \uparrow$ så vil Sharpe-raten $\downarrow$

Hvis $\sigma_\varepsilon \downarrow$ så vil Sharpe-raten $\uparrow$

g) Fra oppgave e har jeg regnet ut at $S_i = \rho_{im} \cdot S_m$.

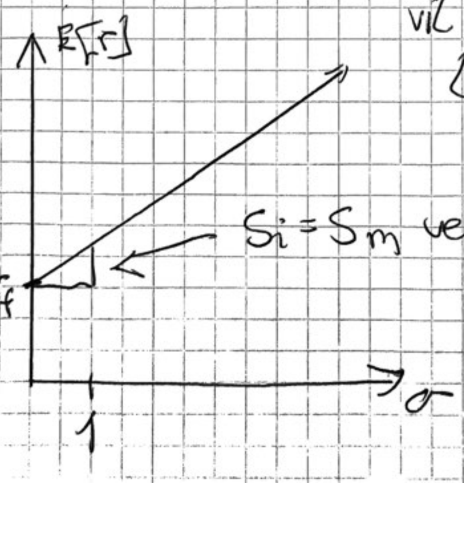
$$\rho_{im} = \frac{S_i}{S_m}$$

Korrelasjonskoeffisienten mellom avkastningen på markedsporteføljen og avkastningen på aksje i er Sharpe$_i$ over Sharpe$_m$.

h) Ved at $\rho_{i,m} = 1$ betyr at:

$$1 = \frac{S_i}{S_m} \iff S_m = S_i$$

Det betyr at sharpe-raten til aksje i gir like mye forventet avkastning for en ekstra enhet standardavvik i porteføljen som Sharpe-raten til markedsporteføljen. Ved lavere enn $\rho_{im}$ vil Sharpe$_i$ bli lavere.



i) For en investor med en ikke veldifisert portefølje vil investorens sharpe-rate bli lavere. Hen vil forvente lavere avkastning for hver enhet standard avvik tatt på seg.

ref. $S_i = \frac{E[r_i] - r_f}{\beta_i \sigma_m + \sigma_{\varepsilon_i}}$.

Ved å ikke ha en veldifisert portefølje vil man ta på seg usystematisk risiko, $\sigma_{\varepsilon_i}$. Ved å diversifisere vil usystematisk risiko synke og føre til en høyere sharpe-rate. Å diversifisere vil man kunne maksimere Sharpe-raten. Men igjen vil man ikke kunne diversifisere markedsrisikoen.

## Oppgave 1.

a) $P_0 = \frac{5}{1+0,04} + \cancel{\frac{5}{(1+0,04)^2}} + \frac{5}{(1+0,05025)^2} + \frac{100}{(1+0,05025)^2}$

$P_0 = 4.8\cancel{07} + 4,53 + 90,66$

$P_0 = 100$ Siden hovedstolen = $P_0$ så ~~handles~~ er obligasjonen er par obligasjon.

b) Yielden = Yield to maturity
Avkastningen ved å holde obligasjonen til forfall

$$100 = \frac{5}{(1+y)} + \frac{5}{(1+y)^3} + \frac{100}{(1+y)^2} \quad \Big| \cdot (1+y)^3$$

$$100(1+y)^2 = 5(1+y) + 105$$

$$100y^2 + 100 + 200y = 5 + 5y + 105 \Leftrightarrow 100y^2 + 195y - 10 = 0$$

abc-formelen

$$y = \frac{-195 \pm \sqrt{195^2 - (4 \cdot 100 \cdot (-10))}}{2 \cdot 100}$$

$y_1 = 0,05$, $y_2 = -2$

Yielden ~~på~~ til obligasjonen er på 5%

c) Durasjon er det verdiveide tidspunkt for betalingene og er gitt

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{T} t \cdot \frac{CF_t}{(1+y)^t}}{P_0}$$

$CF_t$ = cash flow (kupong)
$t$ = tid
$y$ = YTM
$P_0$ = pris på tid 0.

$$D = \frac{1 \times \frac{5}{1,04} + 2 \times \frac{5+100}{(1,05025)^3}}{100}$$

$$= \frac{\frac{125}{26} + 190.38}{100} \approx \underline{\underline{1,95}}$$

Durasjonen til obligasjonen er på 1,95

d) Kupongene er det samme, men mislighold på hovedstol.
Regner ut forventet hovedstol

Hoved = $100(1-p) + 100 \cdot \frac{1}{2}(p)$ $\quad p = 19,14\%$
$= 100 \cdot 0,8086 + 50 \cdot 0,1914$

Betaler hele hoved

mislighold og betaler tilbake halvparten.

$= \underline{90.43.}$

$$P_0 = \frac{5}{1{,}04} + \frac{5+90{,}43}{(1{,}05023)^2}$$

$\underline{\underline{P_0 = 91.32}}$ Prisen på obligasjonen med den nye informasjonen er på rundt 91.32

e) $$91.32 = \frac{5}{1+y} + \frac{5+90{,}43}{(1+y)^2}$$

$$91.32(1+y)^2 = 5(1+y) + 95.43$$

$$91.32 + 182.64y + 91.32y^2 = 5 + 5y + 95.43$$

$$91.32y^2 + 177.64y - 9.11 = 0$$

$$y = \frac{-177.64 \pm \sqrt{177.64^2 - 4(91.32 \cdot (-9.11))}}{2 \cdot 91.32}$$

$\underline{\underline{y_1 \approx 0{,}05}}$ $y_2 = -1.99$

Yielden på obligasjonen er på cirka 5%

f) Når avkastningen/yielden er høyere ~~så~~ så diskonteres fremtidig inntjening med en høyere ~~rent~~ diskonteringsrente/YTM.
For eksempel:

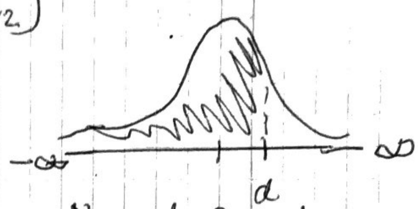
$$\frac{100}{1{,}05} = 95.24 \qquad \frac{100}{1{,}06} = 94.34$$

Vi vet at for obligasjoner så er det negativ sammenheng mellom rente og prisen på obligasjonen.
Høyere rente => Lavere pris
Lavere rente => Høyere pris.

I tillegg så er det en kredittrisiko i spill for ~~disse to at~~ obligasjoner.
Hvis det er en høy sannsynlighet for mislighold så er kreditorene usikker om de får tilbake det de har blitt lovet. Det fører til at investorene vil betale høyere priser på obligasjoner som er sikrere, men har lavere avkastning enn såkalte junkbonds.
Junk bonds / high yield bonds er obligasjoner som gir høyere yield, men risikere mislighold.
For å få investorer til å investere i disse tilbyr de høy yield.
Dermed vil nødvendigvis høy avkastning gi høy pris.

## Oppgave 3

N(d) = farget




Normal fordeling

$$c = S\,N(d_1) - e^{-rT} X\,N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{X} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\frac{S}{X} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

a) $S > X \quad T \to 0$

$$\lim_{T\to 0} d_1 = \frac{\ln S/X + (r + 1/2\,\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = \infty$$

$$\lim_{T\to 0} d_2 = d_1 = \infty$$

$$\lim_{T\to 0} N(d_1) = 1 \qquad \lim_{T\to 0} N(d_2) = 1$$

$d_1 = \infty \qquad d_2 =$

$$\lim_{T\to 0} = \; c = S \cdot 1 - e^{-rT} X \cdot 1 \qquad \lim_{T\to 0} e^{-rT} = 1$$

$$\underline{\underline{c = S - X > 0}}$$

Når $T \to 0$ går opsjonsprisen ned til $S - X > 0$, når $S > X$.
Altså differansen mellom aksje prisen og utøvelsesprisen

b) ~~Bruker samme formel fra oppgave a.~~

~~$\lim_{T\to 0} C = S - X$~~ ~~Utøvelseskurs større enn aksjekurs~~

~~Siden $X > S$ blir $C < 0$, siden $S - X < 0$.~~

siden $X>S$

$$\lim_{T\to 0} d_1 = \frac{\ln S/X + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = -\infty$$

$$\lim_{T\to 0} d_2 = d_1 = -\infty$$

$$\lim_{T\to 0} N(\underset{-\infty = d_1}{d_1}) = 0 \qquad \lim_{T\to 0} N(d_2) = 0$$

$$\lim_{T\to 0} C = S \cdot N(d_1) - e^{-rT} \cdot X \cdot N(d_2)$$

$$C = S \cdot 0 - e^{-rT} \cdot 0$$

$$\underline{C = 0}$$

Når tid til forfall går mot 0, $T \to 0$ og $X > S$ så går opsjonsprisen mot 0. Utøvelsesprisen vil være høyere enn S.

c) $T > 0$ $C?$ $X \to 0$

$$\lim_{X \to 0} d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = \infty$$

$$d_2 = d_1 = \infty$$

$$\lim_{X \to 0} C = S_0 N(\overset{1}{d_1}) - \underbrace{e^{-rT} X N(\overset{1}{d_2})}$$

$$C = S_0 - 0 \quad \text{siden } X \to 0$$

$$\underline{\underline{C = S_0}}$$

Opsjonsprisen går mot aksjekursen $S_0$ når $X \to 0$

d) For en kjøpsopsjon så er payoff

$S_T - X$ når $S_T > X$
$0$ når $S_T \leq X$

Hvis $X \to 0$ da blir payoff lik $S_T$. Tolkningen er at du har rett til å kjøpe aksjen verdi $S_T$ til kurs 0 og dermed kan selge den kurs $S_T$, men er ikke en plikt. ved opsjonens forfallstidspunkt

e) $C$? når $X \to \infty$?

$$\lim_{X \to \infty} d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = -\infty$$

$N(d_1) = 0$ $\quad d_2 = d_1 = -\infty$

$N(d_2) = 0$

$$\lim_{X \to \infty} C_0 = S \cdot N(d_1) - e^{-rT} X \, N(d_2)$$

$$C_0 = S \cdot 0 - e^{-rT} \cdot X \cdot 0$$

$$C_0 = 0 - 0$$

$$\underline{\underline{C_0 = 0}}$$

Når utøvelseskursen går mot $\infty$, går opsjonsprisen $C$ mot 0.

f) Her igjen ser vi på ~~en~~ payoff til en holder av en kjøpsopsjon.

Payoff

$S_T - X$ når $S_T > X$

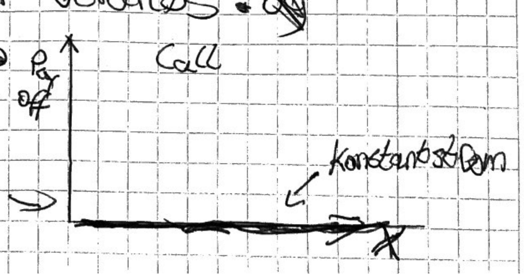
$0$ når $S_T \leq X$

Ved å $X \to \infty$ så vi holderen ikke aldri utøve ~~rett på kjøp av~~ opsjonen sin og payoff for hen blir null.

Call opsjonen blir verdiløs.

~~hen tar et tap~~

Payoff holder seg alltid null.



g) $T \to \infty$ $C$?

$$\lim_{T\to\infty} d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = \infty$$

$$\lim_{T\to\infty} d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = \infty$$

Dermed blir sannsynligheten

$$\lim_{T\to\infty} N(\infty) = 1 \quad ; \quad N(\infty) = 1$$

$$C = S\,N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2)$$

$$\lim_{T\to\infty} C = S \cdot 1 - Xe^{-rT} \cdot 1$$

$$\lim_{T\to\infty} C = S - \frac{X}{e^{rT}} \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{X}{e^{rT}} = 0$$

$$\lim_{T\to\infty} C = S - 0 \implies \underline{\underline{\lim_{T\to\infty} C = S}}$$

Når ~~tid~~ tid til forfall $T \to \infty$ så går opsjonsprisen mot prisen på aksjen, Konvergerer mot prisen på aksjen.