



# ECONnect

NTNU

## Faktor

- en eksamensavis utgitt av ECONnect



**Eksamensbesvarelse:**

**SØK3004 – Videregående matematisk analyse**

Eksamen:

Høsten 2009

Antall sider:

16



## Om ECONnect:

ECONnect er en frivillig studentorganisasjon for studentene på samfunnsøkonomi- og finansøkonomistudiet ved NTNU. Vi arbeider for økt faglig kompetanse blant våre studenter samt tettere kontakt med næringslivet. Det gjør vi ved å arrangere fagdager, gjesteforelesninger, bedriftspresentasjoner m.m. I dag går det ca. 200 studenter på bachelornivå (1.-3. klasse) og ca. 70 studenter på masternivå (4.-5. klasse). Studentene på masternivå er fordelt på de to linjene samfunnsøkonomi (ca. 50 stk) og finansiell økonomi (ca. 20 stk). Mer om ECONnect og aktuelle arrangementer på [www.econnect-ntnu.no](http://www.econnect-ntnu.no).

ECONnect består av følgende personer ved utgivelsestidspunkt:

Bjørn Bergholt (Leder)	<a href="mailto:bjorn@econnect-ntnu.no">bjorn@econnect-ntnu.no</a>
Sophie S. Strømman (Bedriftsansvarlig)	<a href="mailto:sophie@econnect-ntnu.no">sophie@econnect-ntnu.no</a>
Maiken Weidle (Fagdagsansvarlig)	<a href="mailto:maiken@econnect-ntnu.no">maiken@econnect-ntnu.no</a>
Joakim Bjørkhaug (Økonomi- og IT-ansvarlig)	<a href="mailto:joakim@econnect-ntnu.no">joakim@econnect-ntnu.no</a>
Elise Caspersen	<a href="mailto:elise@econnect-ntnu.no">elise@econnect-ntnu.no</a>
Tiril Toftedahl	<a href="mailto:tiril@econnect-ntnu.no">tiril@econnect-ntnu.no</a>
Louis Dieffenthaler	<a href="mailto:louis@econnect-ntnu.no">louis@econnect-ntnu.no</a>
Andreas H. Jung	<a href="mailto:andreas@econnect-ntnu.no">andreas@econnect-ntnu.no</a>
Mari Benedikte Ellingsen	<a href="mailto:mari@econnect-ntnu.no">mari@econnect-ntnu.no</a>
Herman Westrum Thorsen	<a href="mailto:herman@econnect-ntnu.no">herman@econnect-ntnu.no</a>

*Post- og besøksadresse:*

ECONnect, NTNU Dragvoll  
Institutt for samfunnsøkonomi  
Bygg 7, Nivå 5  
7491 Trondheim

*Organisasjonsnummer:*

NO 994 625 314

*Hjemmeside:*

[www.econnect-ntnu.no](http://www.econnect-ntnu.no)

*Merk: Eksamensbesvarelsene har i varierende grad feil og mangler, både oppsett og innhold. De vil også kun vise en av flere mulige fremgangsmåter. ECONnect står ikke ansvarlig for selve faginnholdet.*



**EKSAMENSOPPGAVE I SØK3004**  
**VIDEREGÅENDE MATEMATISK ANALYSE**

**Faglig kontakt under eksamen: Hildegunn E. Stokke**

**Tlf.: 9 16 65**

**Eksamensdato:** Onsdag 9. desember 2009

**Eksamenssted:** Dragvoll

**Eksamenstid:** 5 timer

**Studiepoeng:** 15

**Tillatte hjelpemidler:** Flg formelsamling: Knut Sydsæter, Arne Strøm og Peter Berck (2006): Matematisk formelsamling for økonomer, 4utg. Gyldendal akademiske. Knut Sydsæter, Arne Strøm, og Peter Berck (2005): Economists' mathematical manual, Berlin.  
Enkel kalkulator Citizen SR-270x el. HP 30S.

**Sensur:** 11. januar 2010

Antall sider bokmål: 2

Antall sider nynorsk: 2

Antall sider engelsk: 2

Eksamensoppgaven består av 5 oppgaver med delspørsmål som alle skal besvares. Vekting av oppgavene er gitt i parentes.

### Oppgave 1 (24%)

a) Beregn følgende integraler

i)  $\int (4x^3 - 2x^2 + 5)^4 (3x^2 - x) dx$

ii)  $\int \frac{3x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}}{x+1} dx$

iii)  $\int_0^1 \left( \int_0^1 (x^{1/2}y + 2x + y^{1/2}) dy \right) dx$

b) Beregn den neddiskonterte nåverdien (ved  $t = 0$ ) av en kontinuerlig betalingsstrøm gitt ved  $f(t) = 500t$  kroner per år over tidsintervallet  $[0, 5]$ . Anta 4% rente og kontinuerlig forrentning.

c) Matrisen  $A$  er definert som

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Vis at  $(AA')^{-1}$  eksisterer og finn den inverse.

ii) Dann matrisen  $C = A'(AA')^{-1}$  og vis at  $ACb = b$  for enhver  $2 \times 1$  matrise  $b$ .

### Oppgave 2 (20%)

Gitt følgende produktfunksjoner  $X = (L^{-2} + K^{-2})^{-1/2}$  og  $X = L^{0.4}K^{0.5}$ , der  $X =$  produsert mengde,  $L =$  arbeidskraft og  $K =$  kapital.

a) Finn innsatsfaktorenes grenseelastisiteter samt produktfunksjonenes skalaelastisitet. Forklar kort hva resultatene betyr.

b) Finn substitusjonselastisiteten mellom arbeidskraft og kapital for begge produktfunksjonene.

Oppgave 3 (17%)

Likningen  $2x^2y^2 + xy - 3y = 9$  fremstiller en kurve i  $xy$ -planet.

- Finn kurvens skjæringspunkter med koordinataksene.
- Finn  $y'$  i et vilkårlig punkt  $(x, y)$  på kurven.
- Finn  $y''$  i et vilkårlig punkt  $(x, y)$  på kurven.
- Hva er  $y'$  og  $y''$  i punktet  $(x, y) = (0, -3)$ ? Hva sier dette om funksjonen i dette punktet?

Oppgave 4 (22%)

Betrakt systemet av differensiallikninger

$$\dot{x} = y + x - 1$$

$$\dot{y} = xy - cy$$

der  $c$  er en konstant. Det antas at  $0 < c < 1$ .

- Finn  $x$ -isoklinen(e) og  $y$ -isoklinen(e). Finn systemets likevekt(er).
- Lag faseplandiagram og vis hvordan systemet beveger seg utenfor likevekt. Er likevekten(e) stabil?

Oppgave 5 (17%)

Løs følgende optimeringsproblem:

$$\text{Maks } f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\text{gitt at } 5x^2 + 6xy + 5y^2 \leq 1$$

Oppg. 1

a) i)  $\int (4x^3 - 2x^2 + 5)^4 (3x^2 - x) dx$

Sett  $u = 4x^3 - 2x^2 + 5$

$$du = (12x^2 - 4x) dx \Rightarrow (3x^2 - x) dx = \frac{1}{4} du$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{4} u^4 du = \frac{1}{20} u^5 + C = \underline{\underline{\frac{1}{20} (4x^3 - 2x^2 + 5)^5 + C}}$$

ii)  $\int \frac{3x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}}{x+1} dx$

Polynomdivisjon gir:

$$3x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} : (x+1) = 3x^3 - 4x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{9}{2} + \frac{6}{x+1}$$

$$\begin{array}{r} -(3x^4 + 3x^3) \\ \hline -4x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} \\ -(-4x^3 - 4x^2) \\ \hline \frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{2} \\ -(\frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x) \\ \hline -\frac{9}{2}x + \frac{3}{2} \\ -(-\frac{9}{2}x - \frac{9}{2}) \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\Rightarrow \int \left( 3x^3 - 4x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{9}{2} + \frac{6}{x+1} \right) dx$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{2}x + 6 \ln(x+1) + C}}$$

iii)

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 (x^{1/2}y + 2x + y^{1/2}) dy \right) dx$$



$$= \left[ \frac{1}{2} x^{1/2} y^2 + 2xy + \frac{2}{3} y^{3/2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} x^{1/2} + 2x + \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left( \frac{1}{2} x^{1/2} + 2x + \frac{2}{3} \right) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{3} x^{3/2} + x^2 + \frac{2}{3} x \right]_0^1 = \frac{1}{3} + 1 + \frac{2}{3} = \underline{\underline{2}}$$

$$b) \int_0^5 500t e^{-0,04t} dt$$

$$\text{Set } f(t) = 500t \Rightarrow f'(t) = 500$$

$$\text{og } g'(t) = e^{-0,04t} \Rightarrow g(t) = -\frac{1}{0,04} e^{-0,04t}$$

$$\Rightarrow \int_0^5 500t e^{-0,04t} dt = \left[ -500t \cdot \frac{1}{0,04} e^{-0,04t} \right]_0^5$$

$$- \int_0^5 -500 \cdot \frac{1}{0,04} e^{-0,04t} dt$$

$$= \left[ -12500t e^{-0,04t} \right]_0^5 + 12500 \int_0^5 e^{-0,04t} dt$$

$$= -62500 e^{-0,2} + 12500 \left[ -\frac{1}{0,04} e^{-0,04t} \right]_0^5$$

$$= -62500 e^{-0,2} + 12500 \left( -\frac{1}{0,04} e^{-0,2} + \frac{1}{0,04} \right)$$



$$= -62500 e^{-0,2} - 312500 e^{-0,2} + 312500$$

$$= 5475,97 \approx \underline{\underline{5476 \text{ W}}}$$

c) i)

$$AA' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\det(AA') = 14 \cdot 10 - 25 = 115 \neq 0$$

$$(AA')^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{115} \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 14 \end{pmatrix}}}$$

ii)

$$C = \frac{1}{115} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 14 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{115} \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ -5 & 37 \\ 30 & -15 \end{pmatrix}}}$$

$$ACb = AA' (AA')^{-1} b = Ib = b.$$

Oppg. 2

5.

$$a) X = (L^{-2} + K^{-2})^{-\frac{1}{2}}$$

$$\epsilon_L = \frac{\partial X}{\partial L} \cdot \frac{L}{X} = -\frac{1}{2} (L^{-2} + K^{-2})^{-\frac{3}{2}} (-2) \cdot L^{-3} \cdot \frac{L}{X}$$

$$= (L^{-2} + K^{-2})^{-\frac{3}{2}} \cdot L^{-2} / X$$

$$= (L^{-2} + K^{-2})^{-1} \cdot L^{-2}$$

$$= \frac{1}{(L^{-2} + K^{-2})L^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{L}{K}\right)^2} > 0 \text{ og } < 1$$

Tilsvarende:  $\epsilon_K = \frac{\partial X}{\partial K} \cdot \frac{K}{X} = \frac{1}{1 + \left(\frac{K}{L}\right)^2} > 0 \text{ og } < 1$

∴ Avtakende utbytte mhp begge faktorer.

En økning i K eller L med 1%, øker produksjonen med mindre enn 1%. Grenselasticitetene avhenger av relativ faktorbruk.

$$\epsilon = \epsilon_L + \epsilon_K = \frac{1}{1 + \left(\frac{L}{K}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{K}{L}\right)^2} = \frac{1 + \left(\frac{K}{L}\right)^2 + 1 + \left(\frac{L}{K}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{L}{K}\right)^2\right) \left(1 + \left(\frac{K}{L}\right)^2\right)}$$

$$= \frac{2 + \left(\frac{K}{L}\right)^2 + \left(\frac{L}{K}\right)^2}{1 + \left(\frac{K}{L}\right)^2 + \left(\frac{L}{K}\right)^2 + 1} = \underline{\underline{1}} \quad \text{Konstant utbytte mhp skala.}$$

$$X = L^{0,4} K^{0,5}$$

$$\epsilon_L = \frac{\partial X}{\partial L} \cdot \frac{L}{X} = \frac{0,4 L^{-0,6} K^{0,5} \cdot L}{X} = \underline{\underline{0,4}}$$

$$\epsilon_K = \frac{\partial X}{\partial K} \cdot \frac{K}{X} = \frac{0,5 L^{0,4} K^{-0,5} \cdot K}{X} = \underline{\underline{0,5}}$$

∴ Aftakende utbytte mhp begge faktorer, men grenseelastisitetene er uavhengig av relativ faktorbruk. En økning i bruken av arbeidskraft med 1%, øker produksjonen med 0,4%.

$$\epsilon = \epsilon_L + \epsilon_K = 0,9$$

∴ Aftakende utbytte mhp skalaen.

Denom en øker bruken av både arbeidskraft og kapital med 1%, øker produksjonen med 0,9%.

b)

$$\sigma = El_{f_1/f_2} \left( \frac{K}{L} \right)$$

$$X = f(L, K) = (L^{-2} + K^{-2})^{-1/2}$$

$$\frac{f'_1}{f'_2} = \frac{-\frac{1}{2} (L^{-2} + K^{-2})^{-3/2} (-2) L^{-3}}{-\frac{1}{2} (L^{-2} + K^{-2})^{-3/2} (-2) K^{-3}}$$

$$= \left( \frac{K}{L} \right)^3$$

$$\Rightarrow \left( \frac{K}{L} \right) = \left( \frac{f'_1}{f'_2} \right)^{1/3} \quad \Rightarrow \sigma = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$X = f(L, K) = L^{0,4} K^{0,5}$$

$$\frac{f'_1}{f'_2} = \frac{0,4 L^{-0,6} K^{0,5}}{0,5 L^{0,4} K^{-0,5}} = \frac{0,4}{0,5} \cdot \frac{K}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{0,5}{0,4} \cdot \frac{f'_1}{f'_2} \quad \Rightarrow \sigma = \frac{\partial \left( \frac{K}{L} \right)}{\partial \left( \frac{f'_1}{f'_2} \right)} \cdot \frac{f'_1/f'_2}{K/L} = \frac{0,5}{0,4} \cdot \frac{\frac{0,4}{0,5} \cdot \frac{K}{L}}{\frac{K}{L}}$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

Oppg. 3

$$2x^2y^2 + xy - 3y = 9$$

a)  $x=0 \Rightarrow -3y = 9 \Rightarrow y = -3$

$y=0 \Rightarrow 0 = 9 \Rightarrow$  Ingen skjæring med x-aksen

Skjærer y-aksen i  $(x,y) = (0,-3)$ .

b)  $4xy^2 + 2x^2 2yy' + y + xy' - 3y' = 0$

$$(4x^2y + x - 3)y' = -(4xy^2 + y)$$

$$\underline{\underline{y' = -\frac{4xy^2 + y}{4x^2y + x - 3}}}$$

c) Ta utg. pkt i:  $4xy^2 + 4x^2yy' + y + xy' - 3y' = 0$

$$\Rightarrow 4y^2 + 4x 2yy' + (8xy + 4x^2y')y' + 4x^2yy'' + y' + y' + xy'' - 3y'' = 0$$

$$\Rightarrow 4y^2 + 8xyy' + 8xyy' + 4x^2y'y' + 4x^2yy'' + 2y' + xy'' - 3y'' = 0$$

$$\Rightarrow 4y^2 + 16xyy' + 4x^2y'y' + 4x^2yy'' + 2y' + xy'' - 3y'' = 0$$

$$\Rightarrow (4x^2y + x - 3)y'' = -(4y^2 + 16xyy' + 4x^2y'y' + 2y')$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y'' = -\frac{4y^2 + 16xyy' + 4x^2y'y' + 2y'}{4x^2y + x - 3}}}$$

d) 1 Punkt bei  $(0, -3)$ :  $y' = -1 < 0$ : Fallende Kurve  
 $y'' = -\frac{36 - 2}{-3} = \frac{34}{3} > 0$  Konvex

# Oppg. 4

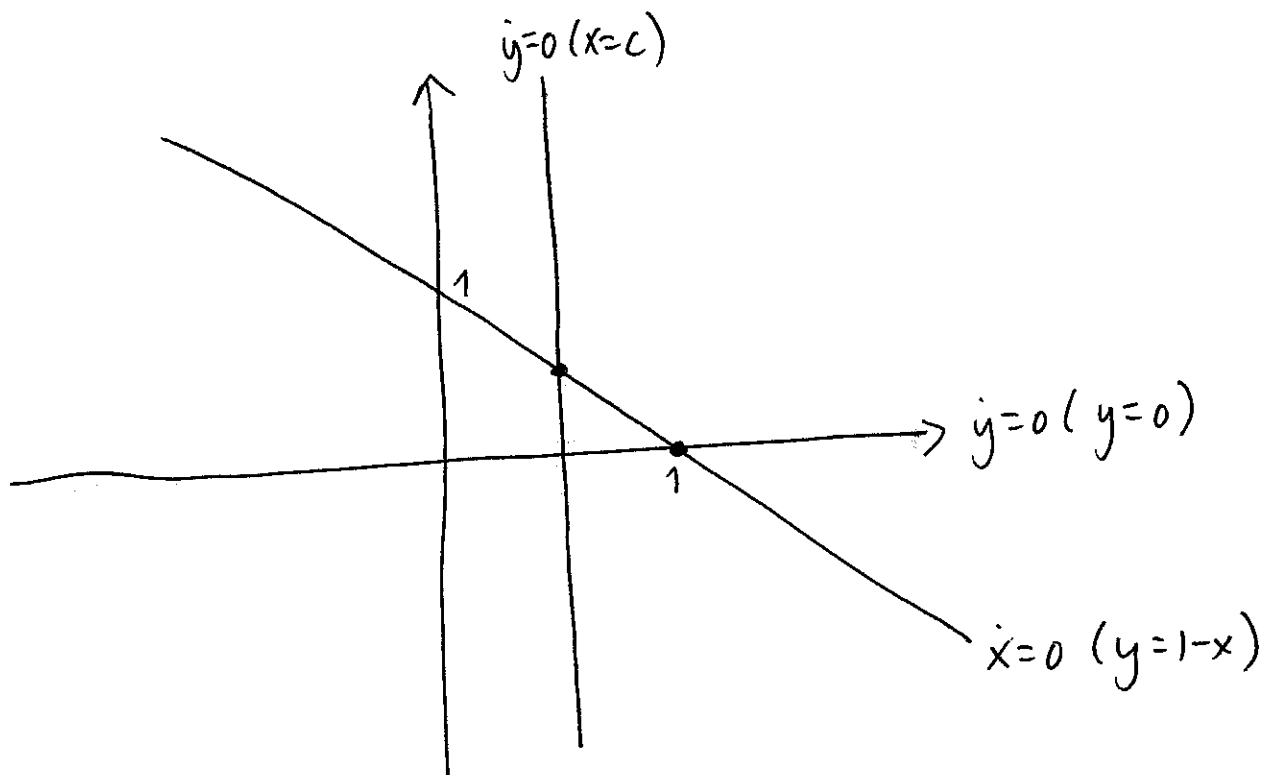
$$\dot{x} = y + x - 1$$

$$\dot{y} = xy - cy \quad \text{der } 0 < c < 1$$

a)  $\dot{x} = 0 \Rightarrow y + x - 1 = 0 \Rightarrow \underline{y = 1 - x}$

$$\dot{y} = 0 \Rightarrow xy - cy = 0 \Rightarrow y(x - c) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{y = 0} \quad \vee \quad \underline{x = c}$$

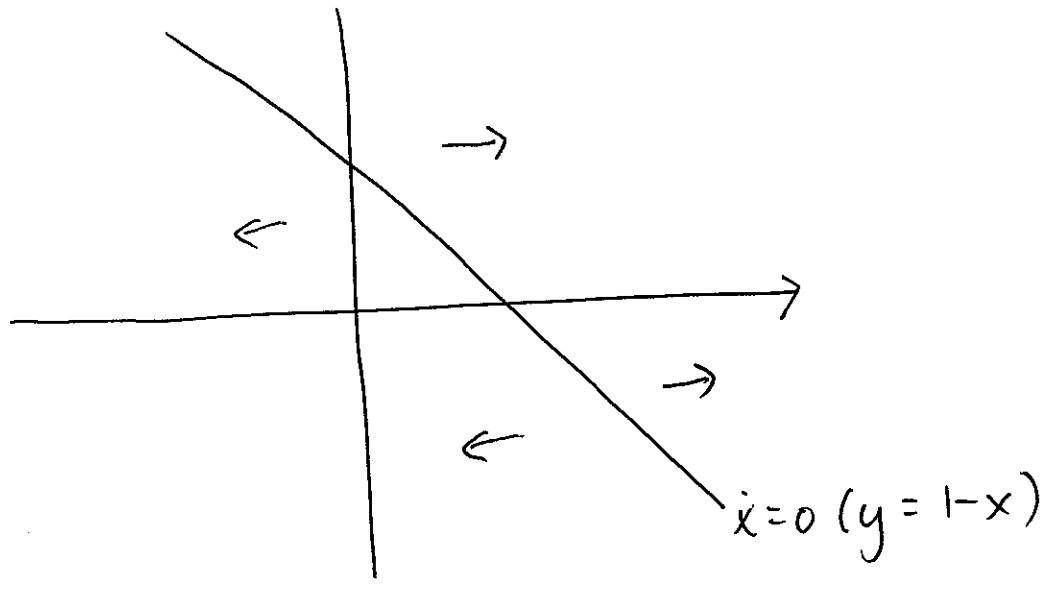


To likevektter:  $(x, y) = (1, 0)$

$$(x, y) = (c, 1 - c)$$

b) x-dynamikk

$$\dot{x} = y + x - 1$$

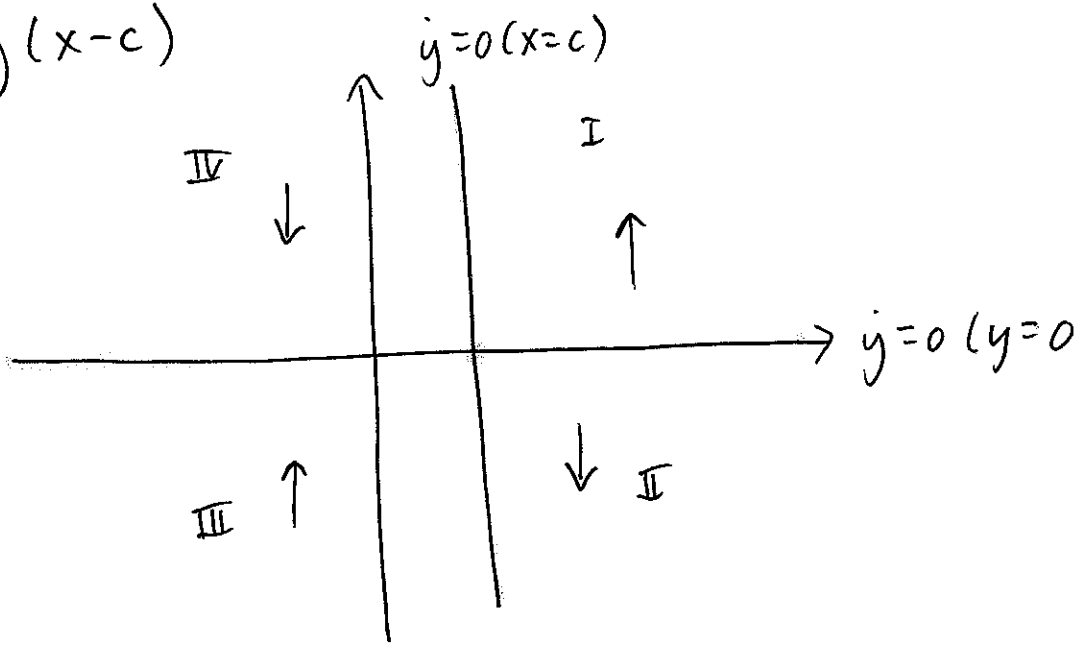


Over kurva:  $y > 1-x \Rightarrow y+x-1 > 0 \Rightarrow \dot{x} > 0$

Under kurva:  $y < 1-x \Rightarrow y+x-1 < 0 \Rightarrow \dot{x} < 0$

y-dynamikk

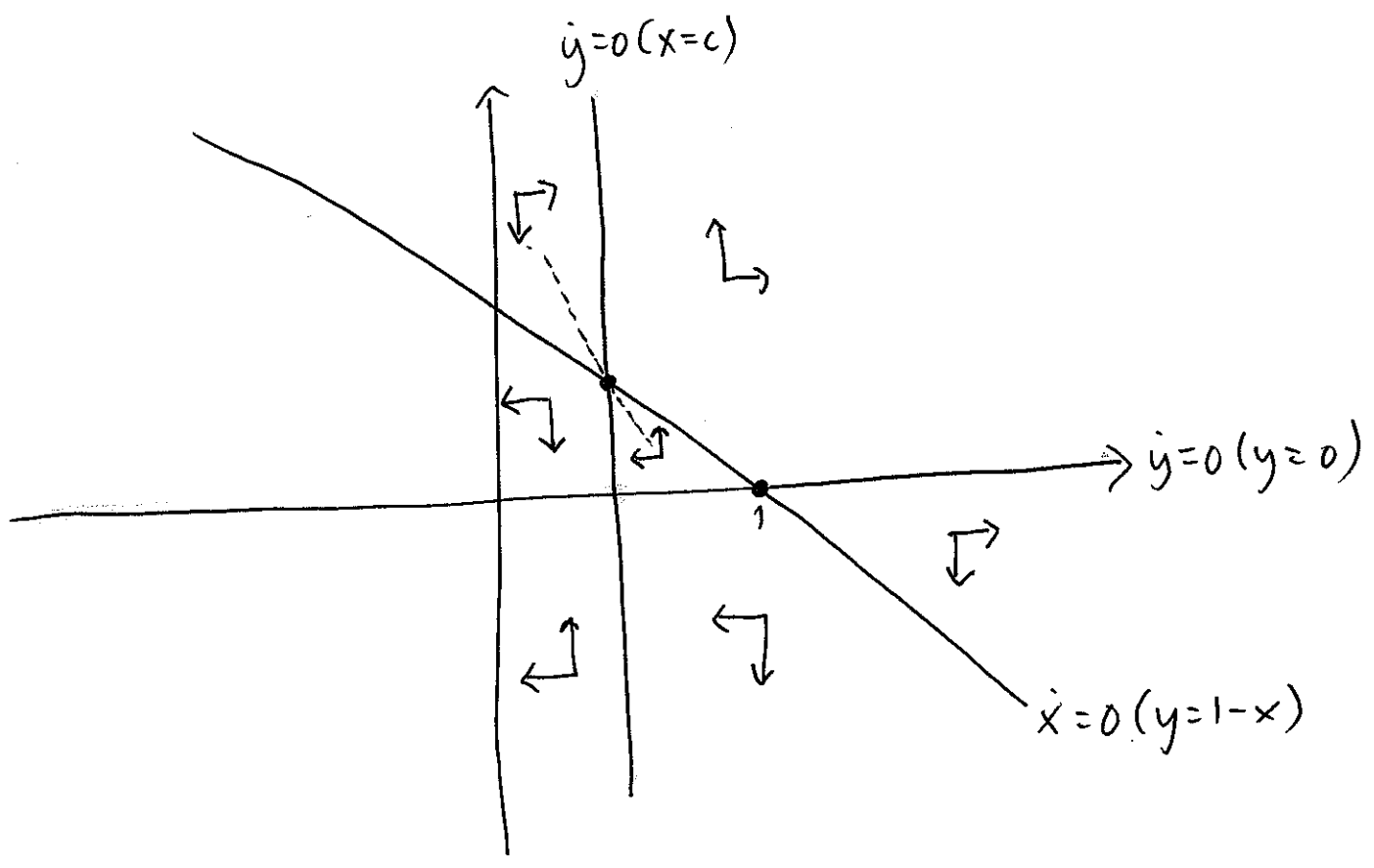
$$\dot{y} = y(x-c)$$





- I :  $x > c$  og  $y > 0 \Rightarrow \dot{y} > 0$   
 II :  $x > c$  og  $y < 0 \Rightarrow \dot{y} < 0$   
 III :  $x < c$  og  $y < 0 \Rightarrow \dot{y} > 0$   
 IV :  $x < c$  og  $y > 0 \Rightarrow \dot{y} < 0$

Samlet dynamikk



$(x,y) = (c, 1-c)$  : Sadelbane

$(x,y) = (1, 0)$  : Ustabil, kan kun nåes om en starter i punktet.

Oppg. 5

13.

$$\text{Max } f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\text{gitt at } 5x^2 + 6xy + 5y^2 \leq 1$$

$$\mathcal{L} = x^2 + y^2 - \lambda(5x^2 + 6xy + 5y^2 - 1)$$

FOBs:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x - \lambda(10x + 6y) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2x}{10x + 6y} = \frac{x}{5x + 3y} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2y - \lambda(6x + 10y) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2y}{6x + 10y} = \frac{y}{3x + 5y} \quad (2)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (\lambda = 0 \text{ hvis } 5x^2 + 6xy + 5y^2 < 1) \quad (3)$$

Tilfelle 1:  $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 1$  og  $d \geq 0$

14.

(1) og (2) gir:

$$\frac{x}{5x+3y} = \frac{y}{3x+5y}$$

$$x(3x+5y) = y(5x+3y)$$

$$3x^2 + 5xy = 5xy + 3y^2$$

$$3x^2 = 3y^2$$

$$x^2 = y^2$$

$$\underline{x = \pm y} \quad \text{inn i bibet.}$$

i)  $x = y$

$$5x^2 + 6x^2 + 5x^2 = 1$$

$$16x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \underline{x = \pm \frac{1}{4}} \Rightarrow \underline{y = \pm \frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \text{ og } (x, y) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$

Må sjekke at  $\lambda \geq 0$ :

$$(x, y) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right): \lambda = \frac{x}{5x+3y} = \frac{\frac{1}{4}}{5 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4}} > 0$$

$$(x, y) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right): \lambda = \frac{-\frac{1}{4}}{-5/4 - 3/4} > 0$$

ii)  $x = -y$

$$5x^2 - 6x^2 + 5x^2 = 1$$

$$4x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\underline{x = \pm \frac{1}{2}} \Rightarrow \underline{y = \mp \frac{1}{2}}$$

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ og } (x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Må sjekke at  $\lambda \geq 0$ :

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right): \lambda = \frac{x}{5x+3y} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}} > 0$$

$$(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right): \lambda = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{5}{2} + \frac{3}{2}} > 0$$

Oppgave 2:  $\lambda = 0$  og  $5x^2 + 6xy + 5y^2 < 1$

16.

Tre likninger og tre ulikheter:

$$\lambda = \frac{x}{5x+3y} \quad (1)$$

$$\lambda = \frac{y}{3x+5y} \quad (2)$$

$$\lambda = 0 \quad (3)$$

(3) inn i (1) og (2) gir  $x=0$  og  $y=0$ .

Må sjekke at betingelse er oppfylt:

$(x,y) = (0,0)$  gir  $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 0 < 1$  . ok.

Dvs: Vi har totalt fem mulige løsningskandidater:

$$(x,y) = (1/4, 1/4) \Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

$$(x,y) = (-1/4, -1/4) \Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

$$(x,y) = (1/2, -1/2) \Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$(x,y) = (-1/2, 1/2) \Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$(x,y) = (0,0) \Rightarrow f(x,y) = 0$$

Optimal løsning,  
siden det gir  
højest funksjons-  
verdi.