ECONnect NTNU

Faktor

- en eksamensavis utgitt av ECONnect

Eksamensbesvarelse:
SØK3004 – Videregående matematisk analyse

Eksamen:	Høst 2010
Antall sider:	19

Om ECONnect:

ECONnect er en frivillig studentorganisasjon for studentene på samfunnsøkonomi- og finansøkonomistudiet ved NTNU. Vi arbeider for økt faglig kompetanse blant våre studenter samt tettere kontakt med næringslivet. Det gjør vi ved å arrangere fagdager, gjesteforelesninger, bedriftspresentasjoner m.m. I dag går det ca. 200 studenter på bachelornivå (1.-3. klasse) og ca. 70 studenter på masternivå (4.-5. klasse). Studentene på masternivå er fordelt på de to linjene samfunnsøkonomi (ca. 50 stk) og finansiell økonomi (ca. 20 stk). Mer om ECONnect og aktuelle arrangementer på www.econnect-ntnu.no.

ECONnect består av følgende personer ved utgivelsestidspunkt:

Ole Christian Grytten(Leder)	ole@econnect-ntnu.no
Tone Hedvig Berg (Bedriftsansvarlig)	tone@econnect-ntnu.no
Elise Caspersen (Fagdagsansvarlig)	elise@econnect-ntnu.no
Tiril Toftdahl (Faktoransvarlig)	tiril@econnect-ntnu.no
Daniel Johansson	daniel@econnect-ntnu.no
Georg Næsheim	georg@econnect-ntnu.no
Mariell Toven	mariell@econnect-ntnu.no
Ellen Normann	ellen@econnect-ntnu.no
Ragnhild Grøv	ragnhild@econnect-ntnu.no
Johan Berg Fossen	johan@econnect-ntnu.no
Martine Ødegård	martine@econnect-ntnu.no
Inga Friis	inga@econnect-ntnu.no
Caroline Lesiewicz	caroline@econnect-ntnu.no

Post- og besøksadresse:	*Organisasjonsnummer:*	*Hjemmeside:*
ECONnect, NTNU Dragvoll Institutt for samfunnsøkonomi Bygg 7, Nivå 5 7491 Trondheim	NO 994 625 314	www.econnect-ntnu.no

Merk: Eksamensbesvarelsene har i varierende grad feil og mangler, både oppsett og innhold. De vil også kun vise en av flere mulige fremgangsmåter. ECONnect står ikke ansvarlig for selve faginnholdet.

Fasit H-2010

Oppgåve 1

a) i) $$\int \frac{5x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{x^2 + x}\,dx$$

Pol.div:

$$5x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x + 1 : x^2 + x = 5x^2 - 6x + 9 + \frac{1 - 7x}{x^2 + x}$$

$$\begin{array}{l}
5x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \\
-5x^4 - 5x^3 \\
\hline
0 \quad - 6x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \\
\quad\; + 6x^3 + 6x^2 \\
\hline
\quad\quad 0 \quad + 9x^2 + 2x + 1 \\
\quad\quad\quad -9x^2 - 9x \\
\hline
\quad\quad\quad 0 \quad - 7x + 1
\end{array}$$

Ser på $\int \frac{1-7x}{x^2+x}$: Delbråk

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{1-7x}{x^2+x}$$

$A(x+1) + Bx = 1 - 7x$

Håll $\forall x$

$x = 0$:

$\underline{A = 1}$

$x = -1$:

$-B = 8 \Rightarrow \underline{B = -8}$

Totalt:

$$\underline{\underline{\frac{5}{3}x^3 - 3x^2 + 9x + \ln x - 8\ln|x+1| + C}}$$

ii)

$$\int_a^b \left(3x^4 + 3xe^{-\frac{1}{2}x}\right) dx$$

Delvis integrasjon på siste ledd:

$f(x) = 3x \quad g'(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$

$$-6xe^{-\frac{1}{2}x} + \int 6e^{-\frac{1}{2}x} \, dx$$

$$-6xe^{-\frac{1}{2}x} - 12e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\Rightarrow \underline{-6e^{-\frac{1}{2}x}(x+2)}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{3}{5}x^5 - 6e^{-\frac{1}{2}x}(x+2)\right]_a^b$$

$$\underline{\underline{\frac{3}{5}b^5 - 6e^{-\frac{1}{2}b}(b+2) - \frac{3}{5}a^5 + 6e^{-\frac{1}{2}a}(a+2)}}$$

b)

$$t\dot{x} = (1+t)x$$

$x = 0$ gjev $g(x) = 0$ og er ei løysing.

Den andre løysinga:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \left(\frac{1}{t} + t\right) dt$$

$$\underline{\underline{x = te^{t} C_1}} \qquad C_1 = e^{C}$$

I pkt $(t, x) = (1, e)$

$$e = eC_1 \Rightarrow C_1 = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = te^{t}}}$$

c)

i)

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ k & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b & 4 \\ a & 2 & a \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5+4a & 5b+8 & 20+4a \\ k+3a & kb+6 & 4k+3a \end{pmatrix}}}$$

ii) $|A| = 15-4k$

$\Rightarrow$ A har en invers $(|A| \neq 0)$ for $k \neq \frac{15}{4}$

$$A^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{15-4k}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -k & 5 \end{pmatrix}}}$$

Oppgåve 2

$$u + xe^{y} + v = e - 1$$

$$x + e^{u+v^2} - y = e^{-1}$$

a) Diff:

I) $du + e^{y}dx + xe^{y}dy + dv = 0$

II) $dx + e^{u+v^2}du + 2ve^{u+v^2}dv - dy = 0$

b) I pkt $(x, y, u, v) = (1, 1, -1, 0)$

i) $du + edx + edy + dv = 0$

$dx + e^{-1}du - dy = 0$

ii) $du = (dy - dx)e$

$$\frac{du}{dy} = e \qquad \frac{du}{dx} = -e$$

ii) inn i i)

$$(dy - dx)e + e\,dx + e\,dy + dv = 0$$

$$\Rightarrow dv = -2e\,dy$$

$$\frac{dv}{dx} = 0 \qquad \frac{dv}{dy} = -2e$$

Oppgåve 3

$$\dot{x} = y + x^2 - a$$

$a, c > 0$ konstantar

$$\dot{y} = c\,x\,a$$

a) $\dot{x} = 0$

$\Rightarrow y = -x^2 + a$

$\dot{y} = 0$

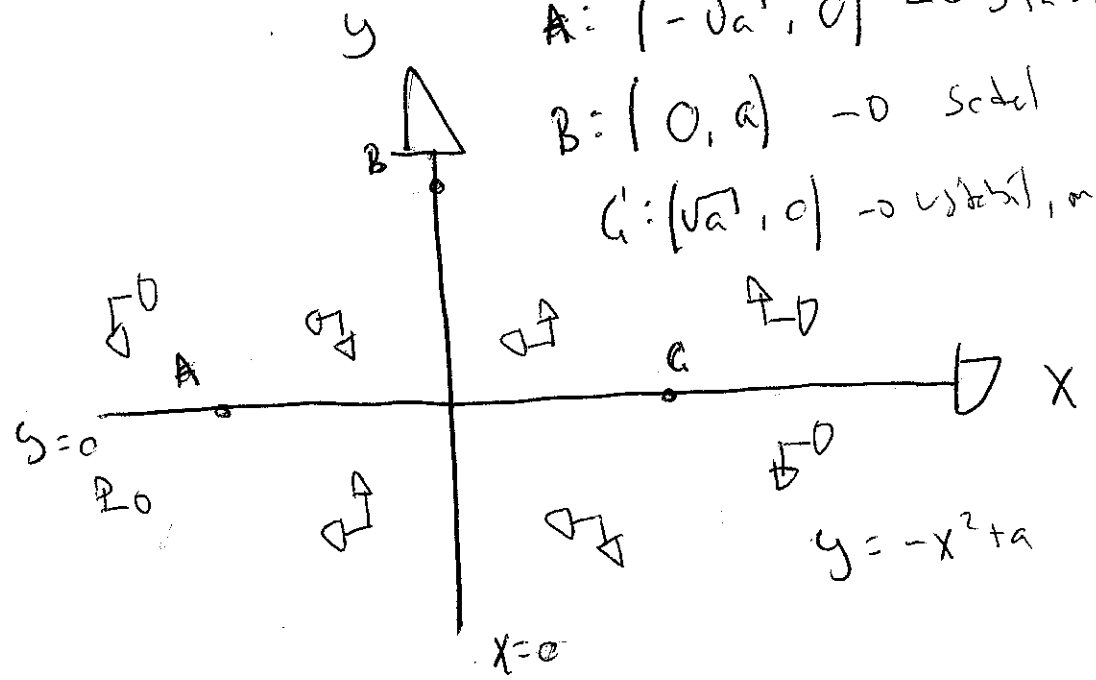
$\Rightarrow x = 0 \lor y = 0$

Tre likevekter:

A: $(-\sqrt{a}, 0) \rightarrow$ Stabil

B: $(0, a) \rightarrow$ Sadel

C: $(\sqrt{a}, 0) \rightarrow$ ustabil, må sjekke dei.



Oppgave 4

a) $\max \int_0^T (1 - ty - u^2)\, dt$ $\quad \dot{y} = u$

$y(0) = y_0$

$y(T)$ fri

Hamiltonian:

$H = 1 - ty - u^2 + pu$

FoB

$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + p = 0$

(i) $u^*(t) = \frac{1}{2} p(t)$

$\frac{\partial H}{\partial \cancel{y}} = -t$

$\Rightarrow \dot{p}(t) = t$

$p = \int t\, dt = \frac{1}{2} t^2 + C_1$

$$p(T) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}T^2 + C_1 = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}T^2$$

$$\Rightarrow p(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}T^2 = -\frac{1}{2}(T^2 - t^2)$$

inn i (i)

$$u^*(t) = -\frac{1}{4}\left[T^2 - t^2\right]$$

$$\Rightarrow x = \int -\frac{1}{4}\left[T^2 - t^2\right] dt$$

$$x^*(t) = x_0 + \frac{1}{12}t^3 - \frac{1}{4}tT^2$$

$\Rightarrow$ Berre eitt tillatt par.

$\Rightarrow$ Hamiltonian er konkav, vi har optimum.

b)

Omformuleres til:

$$\max -\int_0^1 (y + u^2)\,dt \qquad \begin{aligned} \dot{y} &= -u \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &\text{ fri} \end{aligned}$$

Hamiltonian:

$$H = -y - u^2 - pu$$

<u>FOB:</u>

$$\frac{dH}{du} = -2u - p = 0$$

(i) $u^*(t) = -\frac{1}{2}p(t)$

$$\frac{dH}{dy} = -1$$

$\Rightarrow \dot{p}(t) = 1$

$p = t + c_1$

$p(1) = 0$

$\underline{c_1 = -1}$ $\qquad$ $\underline{p = t - 1}$

inn i (i):

$$u^*(t) = -\frac{1}{2}(t-1)$$

$$y = \int -\frac{1}{2}(t-1)\,dt$$

$$y^*(t) = -\frac{1}{4}t^2 + t \qquad (y_0 = 0)$$

$\Rightarrow$ Berre ett tillatt par

Hamiltonian er konkav, vi har optimum.

Kostnadsfunksjon med CES-produktfunksjon

oppgave 5

q : faktorpris

V : ~~[illegible]~~ innsatsfaktor

$$\text{Min } q_1 V_1 + q_2 V_2$$

gitt

$$X = \left(V_1^{-\rho} + V_2^{-\rho}\right)^{-\frac{\beta}{\rho}}$$

$$\mathcal{L} = V_1 q_1 + V_2 q_2 + \lambda\left[X - \left(V_1^{-\rho} + V_2^{-\rho}\right)^{-\frac{\beta}{\rho}}\right]$$

FoB

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_1} = q_1 - \lambda\left(-\frac{\beta}{\rho}\right)\left(V_1^{-\rho} + V_2^{-\rho}\right)^{-\frac{\beta}{\rho}-1}\left(-\rho V_1^{-\rho-1}\right) = 0$$

$$q_1 = V_1^{-(1+\rho)} \lambda \beta \frac{\overbrace{\left(V_1^{-\rho} + V_2^{-\rho}\right)^{-\frac{\beta}{\rho}}}^{X}}{V_1^{-\rho} + V_2^{-\rho}}$$

$$q_1^{-\frac{\beta}{s}} = (\lambda\beta)^{-\frac{\beta}{s}} V_1^{\frac{(1+s)\beta}{s}} \frac{X^{-\frac{\beta}{s}}}{X}$$

$$q_1^{-\frac{\beta}{s}} = (\lambda\beta)^{-\frac{\beta}{s}} V_1^{\frac{(1+s)\beta}{s}} X^{-\frac{\beta+s}{s}}$$

Vil løyse ut for V_1:

$$V_1^{-\frac{(1+s)\beta}{s}} = \frac{(\lambda\beta)^{-\frac{\beta}{s}} X^{-\frac{\beta+s}{s}}}{q_1^{-\frac{\beta}{s}}}$$

$$V_1 = \frac{(\lambda\beta)^{\frac{1}{1+s}} X^{\frac{\beta+s}{(1+s)\beta}}}{q_1^{\frac{1}{1+s}}}$$

$$(i)\quad V_1 = \left[\frac{\lambda \beta X^{\frac{\beta+s}{\beta}}}{q_1}\right]^{\frac{1}{1+s}}$$

Tilsvarande:

$$(ii)\quad V_2 = \left[\frac{\lambda \beta X^{\frac{\beta+s}{\beta}}}{q_2}\right]^{\frac{1}{1+s}}$$

$\Rightarrow$ Mellombelse uttrykk for betinga faktoretterssp.

Set inn i produktfunksjonen (tilbud):

$$X = \left[\left(\frac{(\lambda\beta)^{\frac{1}{1+s}} X^{\frac{\beta+s}{(1+s)\beta}}}{q_1^{\frac{1}{1+s}}}\right)^{-s} + \left(\frac{(\lambda\beta)^{\frac{1}{1+s}} X^{\frac{\beta+s}{(1+s)\beta}}}{q_2^{\frac{1}{1+s}}}\right)^{-s}\right]^{-\frac{\beta}{s}}$$

$$X = (\lambda\beta)^{\frac{\beta}{1+s}} X^{\frac{\beta+s}{1+s}} \underbrace{\left(q_1^{\frac{s}{1+s}} + q_2^{\frac{s}{1+s}}\right)^{-\frac{\beta}{s}}}_{(*)}$$

$$X^{\frac{1-\beta}{1+\rho}} = (\lambda\beta)^{\frac{\beta}{1+\rho}} (*)^{-\frac{\beta}{\rho}}$$

Løyser for $\lambda\beta$:

$$(\lambda\beta)^{-\frac{\beta}{1+\rho}} = X^{-\frac{1-\beta}{1+\rho}} (*)^{-\frac{\beta}{\rho}}$$

$$\lambda\beta = X^{\frac{1-\beta}{\beta}} (*)^{\frac{1+\rho}{\rho}}$$

Set inn for skuggeprisen (for anledninga med gresk følgje) i V_1:

$$V_1 = \left[\frac{X^{\frac{\beta+\rho}{\beta}} X^{\frac{1-\beta}{\beta}} (*)^{\frac{1+\rho}{\rho}}}{q_1} \right]^{\frac{1}{1+\rho}}$$

$$V_1 = X^{\frac{1}{\beta}} (*)^{\frac{1}{s}} q_1^{-\frac{1}{1+s}}$$

med $(*) = \left(q_1^{\frac{s}{1+s}} + q_2^{\frac{s}{1+s}}\right)$

$$V_2 = X^{\frac{1}{\beta}} (*)^{\frac{1}{s}} q_2^{-\frac{1}{1+s}}$$

~~Det~~ Då $\Rightarrow$ Betinga faktoretterspurnadsfunksjonane!

Set inn i kostnadsuttrykket for $\hat{c}$

finne kostnadsfunksjonen:

$$C = q_1 X^{\frac{1}{\beta}} (*)^{\frac{1}{s}} q_1^{-\frac{1}{1+s}} + q_2 X^{\frac{1}{\beta}} (*)^{\frac{1}{s}} q_2^{-\frac{1}{1+s}}$$

$$C = X^{\frac{1}{\beta}} (*)^{\frac{1}{s}} q_1^{\frac{s}{1+s}} + X^{\frac{1}{\beta}} (*)^{\frac{1}{s}} q_2^{\frac{s}{1+s}}$$

med $(*) = q_1^{\frac{s}{1+s}} + q_2^{\frac{s}{1+s}}$

$\Rightarrow$ Kostnadsfunksjonen!

Shephards Lemma

$$\frac{\partial C}{\partial q_i} = V_i$$

Skriv om:

$$C = X^{\frac{1}{\beta}} (*)^{\frac{1}{\rho}} \underbrace{\left(q_1^{\frac{\rho}{1+\rho}} + q_2^{\frac{\rho}{1+\rho}} \right)}_{= (*)}$$

$$C = X^{\frac{1}{\beta}} (*)^{\frac{1+\rho}{\rho}}$$

$$\frac{\partial C}{\partial q_1} = X^{\frac{1}{\beta}} \frac{1+\rho}{\rho} \left[q_1^{\frac{\rho}{1+\rho}} + q_2^{\frac{\rho}{1+\rho}} \right]^{\frac{1}{\rho}} \left(\frac{\rho}{1+\rho} q_1^{-\frac{1}{1+\rho}} \right)$$

$$\frac{dC}{dq_1} = X^{\frac{1}{\beta}} \left(\cancel{X} \right)^{\frac{1}{\rho}} q_1^{-\frac{1}{1+\rho}} = V_1$$

$\Rightarrow$ I màl !