ECONnect NTNU

Faktor

- en eksamensavis utgitt av ECONnect

Eksamensbesvarelse:
SØK3004 – Videregående matematisk analyse

Eksamen:	Høst 2011
Antall sider:	25

Om ECONnect:

ECONnect er en frivillig studentorganisasjon for studentene på samfunnsøkonomi- og finansøkonomistudiet ved NTNU. Vi arbeider for økt faglig kompetanse blant våre studenter samt tettere kontakt med næringslivet. Det gjør vi ved å arrangere fagdager, gjesteforelesninger, bedriftspresentasjoner m.m. I dag går det ca. 200 studenter på bachelornivå (1.-3. klasse) og ca. 70 studenter på masternivå (4.-5. klasse). Studentene på masternivå er fordelt på de to linjene samfunnsøkonomi (ca. 50 stk) og finansiell økonomi (ca. 20 stk). Mer om ECONnect og aktuelle arrangementer på www.econnect-ntnu.no.

ECONnect består av følgende personer ved utgivelsestidspunkt:

Caroline Lesiewicz(Leder)	caroline@econnect-ntnu.no
Mariell Toven(Økonomiansvarlig/kandidattreffet)	mariell@econnect-ntnu.no
Daniel Johansson (Bedriftsansvarlig)	daniel@econnect-ntnu.no
Johan Berg Fossen(Fagdagsansvarlig)	johan@econnect-ntnu.no
Georg Næsheim	georg@econnect-ntnu.no
Ellen Normann	ellen@econnect-ntnu.no
Ragnhild Grøv	ragnhild@econnect-ntnu.no
Martine Ødegård(Faktoransvarlig)	martine@econnect-ntnu.no
Inga Friis	inga@econnect-ntnu.no
Ida Charlotte Engebretsen	ida.charlotte@econnect-ntnu.no

Post- og besøksadresse:	*Organisasjonsnummer:*	*Hjemmeside:*
ECONnect, NTNU Dragvoll Institutt for samfunnsøkonomi Bygg 7, Nivå 5 7491 Trondheim	NO 994 625 314	www.econnect-ntnu.no

Merk: Eksamensbesvarelsene har i varierende grad feil og mangler, både oppsett og innhold. De vil også kun vise en av flere mulige fremgangsmåter. ECONnect står ikke ansvarlig for selve faginnholdet.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for samfunnsøkonomi

EKSAMENSOPPGAVE I SØK3004

VIDEREGÅENDE MATEMATISK ANALYSE

Faglig kontakt under eksamen: Roberto Iacono
Tlf.: 9 16 14

Eksamensdato: Mandag 5. desember 2011
Eksamenssted: Dragvoll
Eksamenstid: 5 timer
Studiepoeng: 15
Tillatte hjelpemidler: Flg formelsamling: Knut Sydsæter, Arne Strøm og Peter Berck (2006): Matematisk formelsamling for økonomer, 4utg. Gyldendal akademiske. Knut Sydsæter, Arne Strøm, og Peter Berck (2005): Economists' mathematical manual, Berlin.
Enkel kalkulator Citizen SR-270x el. HP 30S.

Sensur: 5. januar 2012

Eksamensoppgaven består av 3 oppgaver med delspørsmål som alle skal besvares. Vekting i parentes.

Oppgave 1 (40%)

Betrakt nyttemaksimerings problemet max $U = xy + 3x + 2y$, u.b.b. $px + qy \leq m$, $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

a) Vis hvordan indifferenskurvene til nyttefunksjonen ser ut.

b) Still opp Kuhn-Tucker betingelsene for problemet. Og finn etterspørselen etter de to godene under ulike antagelser om priser og inntekt**.**

c) Finn så den indirekte nyttefunksjonen. Hvordan er sammenhengen mellom indirekte nytte, priser og inntekt?

d) Finn også verdien av lagrangemultiplikatoren (skyggeprisen). Gi en tolkning av lagrangemultiplikatoren ved indre løsning på problemet ($x > 0$, $y > 0$).

e) Anta i stedet at kostnadene skal minimeres gitt nytte. Still opp Kuhn-Tucker betingelsene for dette problemet. Anta så en indre løsning og vis hvordan du kan finne de kompenserte etterspørselsfunksjonene (du trenger nødvendigvis ikke regne dem ut). Vis også hvordan du kan finne utgiftsfunksjonen (levekostnadsfunksjonen). Hva sier Shepard's lemma om dette problemet?

Oppgave 2 (20%)

a) Finn integralet $A = \int_0^b \lambda e^{-\lambda t} dt$, hvor konstanten $\lambda > 0$. Vis arealtolkningen av A. Hva skjer med $\lim_{b \to \infty} A$?

En profittstrøm vokser eksponentielt over tiden med raten $\alpha > 0$, $\pi_t = \pi_o e^{\alpha t}$. Hvor lang tid tar det før strømmen har blitt fordoblet? Diskonteringsrenten er gitt ved $r > 0$, og profittstrømmen løper fram til år $t = T$. Finn nåverdien og sluttverdien av profitten. Løs så det samme problemet i diskret tid.

b) Betrakt modellen i) $Y = C + I + A - B$, ii) $C = C(Y)$ og iii) $B = B(Y)$. Vis hvordan Y, C og B påvirkes av en endring i I både ved implisitt derivasjon og total differensiering. Betrakt deretter de to likningene $xu + uv - yx + y = 0$ og $u^2 - x^2 + v = 3$. Ta det totale differensial, og finn så hvordan de endogene variablene x og y påvirkes av endringer i de eksogene variable u og v.

c) Gitt matrisene $A = \begin{pmatrix} r & p \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Finn først matriseproduktet $A \cdot A$. Finn også determinanten til A.

Har matrisen A en invers, og i så fall hva er verdien?

Oppgave 3 (40%)

a) Vi har systemet av differensiallikninger $dX_t / dt = rX_t(1 - X_t) - \alpha X_t Y_t$ og $dY_t / dt = sY_t(1 - Y_t) + \beta Y_t X_t$ hvor $r > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ og $s > 0$. Finn likningen(e) for X -isoklinen og finn likningen(e) for Y -isoklinen. Finn deretter den indre likevekten ved bruk av Cramers regel. Lag faseplan diagram og vis ved piler hvordan systemet beveger seg utenfor likevekten. Synes likevekten å være stabil? Hvordan ville du gått fram hvis du analytisk skulle undersøke stabiliteten (hint: Jacobimatrisen).

b) Betrakt nå den såkalte svinesykelmodellen hvor markedsetterspørselen etter gris er gitt som $D_t = a + bp_t$ og markedstilbudet som $S_t = \alpha + \beta p_{t-1}$. Anta markedslikevekt, og finn hvordan markedsprisen utvikler seg over tiden. Under hvilke betingelser vil markedsprisen stabilisere seg?

c) Betrakt til slutt populasjonsmodellen $X_{t+1} = F(X_t)$, hvor $F(X_t) = (X_t - a)(b - X_t)$. Populasjonen er hele tiden ikke-negativ $X_t \geq 0$, og begge parametrene er positive, $b > a > 0$. Studer først egenskapene til funksjonen $F(X_t)$ og lag figur. Studer deretter ved figurbetraktning hvordan populasjonen utvikler seg over tid. Vil populasjonen stabilisere seg? (Hint: sett av X_{t+1} langs den vertikale akse og X_t langs den horisontale akse).

Oppgåve 1 (40%)

Studer nyttemaksimerings problemet max $U = xy + 3x + 2y$, u.b.b. $px + qy \leq m$, $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

a) Vis korleis indifferenskurvane til nyttefunksjonen sjår ut.

b) Sett opp Kuhn-Tucker betingelsene for problemet. Finn etterspurnaden etter dei to godane under ulik priser og inntekt**.**

c) Finn så den indirekte nyttefunksjonen. Korleis er samanhengen mellom indirekte nytte, prisar og inntekt?

d) Finn også verdia av lagrangemultiplikatoren (skoggeprisen). Gje ein tying av lagrangemultiplikatoren ved indre løysing på problemet ($x > 0$, $y > 0$).

e) Anta i stedet at kostnadene skal minimeras gjeven nytte. Sett opp Kuhn-Tucker betingelsene for dette problemet. Forutset så ein indre løysing og vis korleis du kan finne dei kompenserte etterspurnadsfunksjonane (du treng ikkje rekne dem ut). Vis også korleis du kan finne utgiftsfunksjonen (levekostnadsfunksjonen). Kva seier Shepard's lemma om dette problemet?

Oppgåve 2 (20%)

a) Finn integralet $A = \int_0^b \lambda e^{-\lambda t} dt$, kor konstanten $\lambda > 0$. Vis arealtolkninga av A. Kva skjer med $\lim_{b \to \infty} A$?

Ein profittstrøym veks eksponentielt over tida med raten $\alpha > 0$, $\pi_t = \pi_o e^{\alpha t}$. Kor lang tid tek det før strøymen har dobla seg? Diskonteringsrenta er gjeven ved $r > 0$, og profittstrøymen løyper fram til år $t = T$. Finn nåverdien og sluttverdien av profitten. Løys så det same problemet i diskret tid.

b) Sjå på modellen i) $Y = C + I + A - B$, ii) $C = C(Y)$ og iii) $B = B(Y)$. Vis korleis Y, C og B påverkas av ei endring i I både ved implisitt og total differensiering. Betrakt deretter dei to likningane $xu + uv - yx + y = 0$ og $u^2 - x^2 + v = 3$. Tek det totale differensial, og finn så korleis dei endogene variablane x og y påverkas av endringar i dei eksogene variablane u og v.

c) Vi har matrisen $A = \begin{pmatrix} r & p \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Berekn matriseproduktet $A \cdot A$. Berekn også determinanten til A.

Har matrisen A ein invers, og kva er i såfall verdien?

Oppgåve 3 (40%)

a) Vi har systemet av differensiallikningar $dX_t / dt = rX_t(1 - X_t) - \alpha X_t Y_t$ og $dY_t / dt = sY_t(1 - Y_t) + \beta Y_t X_t$ kor $r > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ og $s > 0$. Finn likninga(ne) for X -isoklinen og finn likninga(ne) for Y -isoklinen. Finn så den indre jamnlikheiten ved bruk av Cramers regel. Lag faseplan diagram og vis ved piler korleis systemet endras utanfor jamnlikheiten. Er den stabil? Syn korleis du ville ha gått fram hvis du analytisk skulle studere stabiliteten (hint: Jacobimatrisen).

b) Sjå nå på den såkalla svinesykelmodellen kor markedsetterspurdnaden etter gris er gjeven som $D_t = a + bp_t$ og markedstilbodet som $S_t = \alpha + \beta p_{t-1}$. Anta markedsjamnvekt, og finn korleis markedsprisen endrar seg over tiden. Vil prisen stabilisera seg?

c) Studer til slutt populasjonsmodellen $X_{t+1} = F(X_t)$, kor $F(X_t) = (X_t - a)(b - X_t)$. Populasjonen er heile tida ikkje-negativ $X_t \geq 0$, og begge parametrene er positive, $b > a > 0$. Studer først eigenskapene til funksjonen $F(X_t)$ og lag ein figur. Studer deretter ved figurbetraktning korleis populasjonen utviklar seg over tid. Vil populasjonen stabiliseras? (Hint: sett av X_{t+1} langs den vertikale akse og X_t langs den horisontale akse).

1

$$U = xy + 3x + 2y$$

a)

$$\bar{u} = y(x+2) + 3x$$

$$y(x+2) = \bar{u} - 3x$$

$$y = \frac{\bar{u} - 3x}{x+2}$$ – likning til indifferenskurven

helning:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3(x+2) - (\bar{u} - 3x)}{(x+2)^2} = -\frac{(6+\bar{u})}{(x+2)^2} < 0 \quad (\bar{u} \geq 0)$$

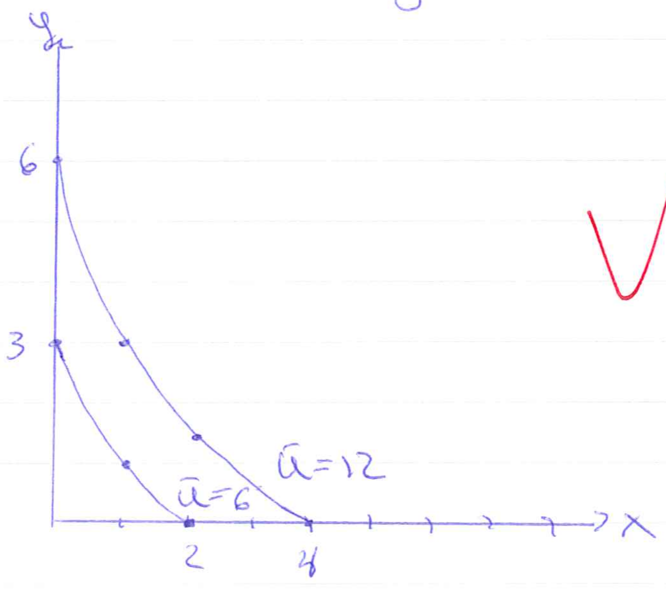
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(6+\bar{u})}{(x+2)^3} > 0 \quad \begin{pmatrix} x \geq 0 \\ \bar{u} \geq 0 \end{pmatrix}$$

kurven er fallende og konveks

skjæringspunkt med aksene:

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{\bar{u}}{3}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{\bar{u}}{2}$$



Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

1b-

max $u = xy + 3x + 2y$ ubb. $px + qy \leq m$
$x \geq 0 \quad y \geq 0$

~~der~~ setter opp Lagrange:

$$\mathcal{L} = xy + 3x + 2y - \lambda(px + qy - m) - \mu_1(-x) - \mu_2(-y)$$

Kuhn-Tucker betingelsene:

(1) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y + 3 - \lambda p + \mu_1 = 0$

(2) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x + 2 - \lambda q + \mu_2 = 0$

(3) $\lambda \geq 0 \qquad \lambda(px + qy - m) = 0$

(4) $\mu_1 \geq 0 \qquad \mu_1 x = 0$

(5) $\mu_2 \geq 0 \qquad \mu_2 y = 0$

ser av funksjonen (u) at nytten økes ved en økning i konsum,
$\left(\frac{\partial u}{\partial x} = y + 3 > 0 \ (y \geq 0) \text{ og } \frac{\partial u}{\partial y} = x + 2 > 0 \ (x \geq 0) \right)$
konsumenten vil derfor bruke hele inntekta, m. slik at vi vil ha
$px + qy = m$ i optimum.
Det vil derfor heller ikke være optimalt å konsumere $x = y = 0$.
ser nå på ~~randløs~~ eventuelle randløsninger og indre løsning.

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10037

Dato/*Date:* 5/12-11 Side/*Page:* 3

Emnekode/*Subject* Søk 3004 Antall ark/*Number of pages:* 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

16 cont.

i) $x = 0 \quad y > 0 \quad (\mu_2 = 0) \quad (\mu_1 \geq 0)$

$x = 0 \Rightarrow y^* = \frac{m}{q}$ ✓

(2) $2 - \lambda q = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{q}$ ✓

(1) $\frac{m}{q} + 3 - \frac{2}{q} p + \mu_1 = 0$

$\Rightarrow \mu_1 = \frac{2p}{q} - \frac{m}{q} - 3$

må være ≥ 0

$\frac{2p}{q} - \frac{m}{q} - 3 \geq 0$ (prisene, $p, q > 0$)

$2p - m - 3q \geq 0 \qquad 2p - 3q \geq m$

$2p \geq m + 3q$

$p \geq \frac{m+3q}{2}$

for at $(x^*, y^*) = (0, \frac{m}{q})$ skal være en løsning må

$p \geq \frac{m+3q}{2}$

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

1b cont

ii) $y = 0 \quad x > 0 \quad (\mu_1 = 0) \quad (\mu_2 \geq 0)$

$\Rightarrow x^* = \cancel{\frac{m}{q}} \cdot \frac{m}{p}$ ✓

(1) $3 - \lambda p = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{p}$

(3 2)

$\frac{m}{p} + 2 - \frac{3}{p}q + \mu_2 = 0$

$\cancel{\mu_2} \quad \mu_2 = \frac{3q}{p} - \frac{m}{p} - 2$

må være ≥ 0

$\frac{3q}{p} - \frac{m}{p} - 2 \geq 0$

$3q - m - 2p \geq 0$

$3q - m \geq 2p$

$p \leq \frac{3q - m}{2} = -\frac{(m - 3q)}{2}$

for at $(x^*, y^*) = (\frac{m}{p}, 0)$ skal være en løsning må

$p \leq -\frac{(m-3q)}{2} \quad (3q > m)$

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10037

Dato/*Date:* 5/12-11 Side/*Page:* 5

Emnekode/*Subject* Søk 3004 Antall ark/*Number of pages:* 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

1b cont.

iii) $x > 0 \quad y > 0 \quad (\mu_1 = \mu_2 = 0)$ (indre løsning)

$$* \quad px + qy = m$$

$$y + 3 - \lambda p = 0 \qquad \lambda = \frac{y+3}{p} > 0 \quad (y>0)$$

$$x + 2 - \lambda q = 0 \qquad \lambda = \frac{x+2}{q} > 0 \quad (x>0)$$

$$\frac{y+3}{p} = \frac{x+2}{q}$$

$$q(y+3) = p(x+2)$$

$$y + 3 = \frac{p}{q}(x+2)$$

$$y = \frac{p}{q}(x+2) - 3$$

$$px + q\left(\frac{p}{q}(x+2) - 3\right) = m$$

$$px + px + 2p - 3q = m$$

$$2px = m - 2p + 3q$$

$$x^* = \frac{m - 2p + 3q}{2p} = \frac{m + 3q}{2p} - 1$$

$$y^* = \frac{m}{q} - \frac{p}{q}\left(\frac{m+3q}{2p} - 1\right)$$

$$= \frac{m}{q} - \frac{m+3q}{2q} + \frac{p}{q}$$

$$= \frac{2m - m - 3q + 2p}{2q}$$

$$= \frac{m + 2p - 3q}{2q} = \frac{m+2p}{2q} - \frac{3}{2}$$

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{m+3q}{2p} - 1, \frac{m+2p}{2q} - \frac{3}{2}\right)$$

vil være en løsning når

$$-\frac{(m-3q)}{2} < p < \frac{m+3q}{2}$$

1c

indirekte nyttefunksjon:

$$V(p,q,m) = \begin{cases} \frac{2m}{q} & \text{hvis } p \geq \frac{m+3q}{2} \\ \frac{3m}{p} & \text{hvis } p \leq \frac{-(m-3q)}{2} \\ (*) & \text{hvis } \frac{-(m-3q)}{2} < p < \frac{m+3q}{2} \end{cases}$$

(se nedenfor)

$$V = \left(\frac{m+3q}{2p} - 1\right)\left(\frac{m+2p}{2q} - \frac{3}{2}\right) + 3\left(\frac{m+3q}{2p} - 1\right) + 2\left(\frac{m+2p}{2q} - \frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{(m+3q)(m+2p)}{4pq} - \frac{3(m+3q)}{4p} - \frac{m+2p}{2q} + \frac{3}{2} + \frac{3(m+3q)}{2p} - 3 + \frac{2(m+2p)}{2q} - 3$$

$$= \underbrace{\frac{(m+3q)(m+2p)}{4pq} + \frac{3(m+3q)}{4p} + \frac{m+2p}{2q} - \frac{9}{2}}_{(*)}$$

Sammenheng $V(p,q,m)$ og:

1) pris, p

$\frac{\partial V}{\partial p} = 0$ hvis $p \geq \frac{m+3q}{2}$ ~~(så stor nok til at en nedgang i prisen, p, ikke fører til at $p < \frac{m+3q}{2}$, da er ikke $\frac{\partial V}{\partial p} = 0$~~

1c cont.

$$\frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{3m}{p^2} \quad \text{hvis } p \leq \frac{-(m-3q)}{2}$$

~~(og en prisøkning ikke er så stor at $p > \frac{-(m-3q)}{2}$)~~

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{2(m+3q)4pq - 4q(m+3q)(m+2p)}{16p^2q^2}$$

$$- \frac{3(m+3q)}{4p^2} + \frac{1}{q}$$

$$= \frac{2(m+3q) - (m+2p)(m+3q) - 3q(m+3q) + 4p^2}{4p^2q}$$

$$= \frac{(m+3q)(2-m-2p-3q) + 4p^2}{4p^2q}$$

$$< 0$$

intuisjon: en prisøkning vil redusere mulighetene til konsum, har ingen effekt hvis varen ikke ble konsumert i utgangspunktet. (eller at prisendringen er så stor at de vil konsumere varen) totalt. $\frac{\partial V}{\partial p} \leq 0$

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10037

Dato/*Date:* 5/12-11 Side/*Page:* 8

Emnekode/*Subject* Søk 3004 Antall ark/*Number of pages:* 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

1c) cont.

2) prisen, q

$$\frac{\partial V}{\partial q} \leq 0$$

$$= 0 \quad \text{når} \quad p \leq -\frac{(m-3q)}{2}$$

$$= -\frac{2m}{q^2} < 0 \quad \text{når} \quad p \geq \frac{m+3q}{2}$$

$$< 0 \quad \text{når} \quad -\frac{(m-3q)}{2} < p < \frac{m+3q}{2}$$

samme forklaring som i 1)

3) inntekta, m

$$\frac{\partial V}{\partial m} \begin{cases} = \frac{2}{q} > 0 & \text{hvis} \quad p \geq \frac{m+3q}{2} \\ = \frac{3}{p} > 0 & \text{hvis} \quad p \leq -\frac{(m-3q)}{2} \\ = \frac{2m+2p+3q}{2pq} > 0 & \text{hvis} \quad -\frac{(m-3q)}{2} < p < \frac{m+3q}{2} \end{cases}$$

en inntektsøkning vil føre til økt konsum og nytte i alle tilfeller (p verdier)

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

1d

$$p \geq \frac{m+3q}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{q}$$

$$p \leq -\frac{(m-3q)}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{3}{p}$$

$$-\frac{(m-3q)}{2} < p < \frac{m+3q}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{y+3}{p} = \frac{x+2}{q}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{q}\left(\frac{m+3q}{2p} - 1 + 2\right)$$

$$\lambda = \frac{m+3q}{2pq} + \frac{1}{q} = \frac{m+3q+2p}{2pq}$$

$$\lambda = \frac{\partial V}{\partial m}$$

λ sier ~~hvo~~ hvor mye ekstra nytte man får ved å øke inntekta. Den kan derfor tolkes som grensenytten av penger.

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

1e $\bar{U} = xy + 3x + 2y$

~~da~~ settes opp Lagrange:

$\max \mathcal{L} = -(px + qy) - \lambda(\bar{U} - xy - 3x - 2y) - \mu_1(-x) - \mu_2(-y)$

Kuhn-Tucker betingelsene:

FOB:

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -p + \lambda(y + 3) + \mu_1 = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -q + \lambda(x + 2) + \mu_2 = 0$

komplementære slakkhetsbetingelser:

~~$\lambda \geq 0$ $\lambda(\bar{U} - xy - 3x - 2y) = 0$~~

$\mu_1 \geq 0$ $\mu_1 x = 0$

$\mu_2 \geq 0$ $\mu_2 y = 0$

($\bar{U} = xy - 3x - 2y$ skal holde da $\bar{U} < xy - 3x - 2y$ alltid vil gi høyere kostnad)

~~for å finne kompensert etterspørsel vil jeg gå fram som i 1c) undersøke $(x > 0, y = 0)$, $(x = 0, y > 0)$ og $(x > 0, y > 0)$ og finne (x, y) ved å bruke bibetingelsen $\bar{U} = xy + 3x + 2y$ og få (x, y) som en funksjon av prisene p og q, og nyttenivået.~~

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

1c cont.

antar indre løsning

$\Rightarrow$ (1) $\lambda(y+3) = p$

og (2) $\lambda(x+2) = q$

bruker (3) $\bar{u} = xy + 3x + 2y$

(1) og (2) gir $\frac{y+3}{x+2} = \frac{p}{q}$

$\Rightarrow y+3 = \frac{p}{q}(x+2)$

(4) $y = \frac{p}{q}(x+2) - 3$

Setter dette inn i $\bar{u}$ og løser for x, vil da få den kompenserte etterspørselsfunksjonen for x. (x^*)

Setter x^* inn i (4) og løser for y, får da y^*, den kompenserte etterspørselsfunksjonen til y.

Utgiftsfunksjonen finner man ved å sette uttrykkene for y^* og x^* inn i:

$C = px^* + qy^*$

Shepards lemma sier at hvis vi deriverer C mhp (p, q) vil vi få de kompenserte etterspørselsfunksjonene som svar.

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10037

Dato/*Date:* 5/12 - 11 Side/*Page:* 12

Emnekode/*Subject* Sqh 3004 Antall ark/*Number of pages:* 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

1e cont

$$\frac{\partial C}{\partial p} = x^* \quad \text{og} \quad \frac{\partial C}{\partial q} = y^*$$

dvs at de indirekte effektene forsvinner $\left(p \frac{\partial x^*}{\partial p} + q \frac{\partial y^*}{\partial p} = 0\right)$

Den gule kopien beholder du/*Please keep the yellow page*

Tapir Uttrykk 12.05.2011

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10037

Dato/*Date:* 5/12-11 Side/*Page:* 13

Emnekode/*Subject* Søk 3004 Antall ark/*Number of pages:* 25

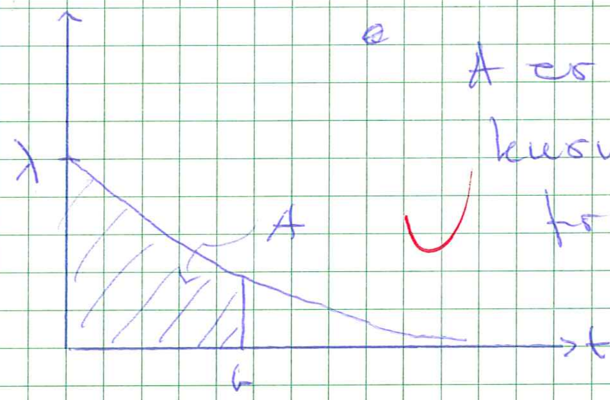
Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

2a

$A = \int_0^b \lambda e^{-\lambda t} dx$ står det i oppgaven men jeg regner med at det er

$$A = \int_0^b \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$= \Big|_0^b -e^{-\lambda t} = -(e^{-\lambda b} - 1) = \underline{1 - e^{-\lambda b}}$$



A er arealet mellom kurven og t-aksen fra t=0 til t=b

når $b \to \infty$ vil $e^{-\lambda b} \to 0$ $\quad \left(e^{-\lambda b} = \left(\frac{1}{e^{\lambda b}}\right)\right)$

slik at $\underline{A \to 1 \text{ når } b \to \infty}$

$$\Pi_t = \Pi_0 e^{\alpha t}$$

$$\cancel{2\Pi_t = \Pi_0 e^{\alpha t^*}}$$

$$\cancel{2\Pi_0 e^{\alpha t^*}}$$

$t=0 \qquad \Pi_0 = \Pi_0 \cdot 1$

$t=t^* \qquad 2\Pi_0 = \Pi_0 e^{\alpha t^*}$

$$2 = e^{\alpha t^*}$$

$$\ln 2 = \alpha t^*$$

$$\underline{t^* = \frac{\ln 2}{\alpha}}$$

t^* er fordoblingstida.

nåverdien av profitten: (kontinuerlig)

$$PV = \int_0^T \Pi_0 e^{\alpha t} e^{-rt} dt = \int_0^T \Pi_0 e^{(\alpha - r)t} dt$$

$$= \Big|_0^T \frac{\Pi_0}{\alpha - r} e^{(\alpha - r)t}$$

$$= \frac{\Pi_0}{\alpha - r} e^{(\alpha - r)T} - \frac{\Pi_0}{\alpha - r}$$

$$= \frac{\Pi_0}{\alpha - r} \left(e^{(\alpha - r)T} - 1 \right)$$

sluttverdi av profitt (kontinuerlig)

på samme måte som når profitten neddiskonteres er profitten i begynnelsen verdt mer da den kan investeres og forrentes.

$$EV = \int_0^T \Pi_0 e^{(\alpha + r)t}$$

?

$$\Rightarrow EV = \frac{\Pi_0}{\alpha + r} \left(e^{(\alpha + r)T} - 1 \right)$$

diskret tid:

nåverdi:

$$PV = \sum_0^T \frac{\Pi_0 (1+\alpha)^t}{(1+r)^t} = \sum_0^T \left(\frac{1+\alpha}{1+r} \right)^t \Pi_0$$

$$= \Pi_0 \left(1 + \left(\frac{1+\alpha}{1+r} \right) \cdots\cdots \left(\frac{1+\alpha}{1+r} \right)^T \right)$$

geometriskrekke med T+1 ledd

$$PV = \Pi_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{1+\alpha}{1+r} \right)^{T+1}}{1 - \left(\frac{1+\alpha}{1+r} \right)} \right)$$

Kandidat nr./*Candidate no.* 10037

Dato/*Date:* 5/12 - 11 Side/*Page:* 15

Emnekode/*Subject* Søk 3004 Antall ark/*Number of pages:* 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

2a cont.

~~$P_r = \pi_0 (1+r - t$~~

sluttverdi:

$$EV = \sum_{0}^{T} \pi_0 (1+\alpha)^t (1+r)^t$$

$$\Rightarrow EV = \pi_0 \left(\frac{1 - (1+\alpha)^{T+1}(1+r)^{T+1}}{1-(1+\alpha)(1+r)} \right)$$

Den gule kopien beholder du/*Please keep the yellow page*

Tapir Uttrykk 12.05.2011

2b

i) $Y = C + I + A - B$

ii) $C = C(Y)$

iii) $B = B(Y)$

iv) $Y = C(Y) + I + A - B(Y)$

deriverer mhp I (implisitt derivasjon)

$Y'_I = C'_Y Y'_I + 1 - B'_Y Y'_I$ ✓

$Y'_I(1 - C'_Y + B'_Y) = 1$

$Y'_I = \dfrac{1}{1 - C'_Y + B'_Y}$

$C'_I = C'_Y Y'_I$

$C'_I = \dfrac{C'_Y}{1 - C'_Y + B'_Y}$ ✓

$B'_I = B'_Y Y'_I$

$= \dfrac{B'_Y}{1 - C'_Y + B'_Y}$

~~implisitt derive total differensiering:~~

~~$iv)\ dY + Y'_I dI = C'_Y dY + C'_Y Y'_I dI + dI - B'_Y dY - B'_Y Y'$~~

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10037

Dato/*Date:* 5/12 - 11 Side/*Page:* 17

Emnekode/*Subject* Søk 3004 Antall ark/*Number of pages:* 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

totaldifferensiering

i) $dY = dC + dI + dA - dB$

ii) $dC = C'_Y dY$ ✓

iii) $dB = B'_Y dY$ ✓

$dA = 0$

$A \neq A(Y)$

$\neq A(I)$

$dY = C'_Y dY + dI - B'_Y dY$ ✓

$dY(1 - C'_Y + B'_Y) = dI$

$$\frac{dY}{dI} = \frac{1}{1 - C'_Y + B'_Y}$$

$$\frac{dC}{\cancel{d}} = C'_Y \cdot \left(\frac{dI}{1 - C'_Y + B'_Y}\right)$$

$$\frac{dC}{dI} = \frac{C'_Y}{1 - C'_Y + B'_Y}$$

$$\frac{dB}{dI} = \frac{B'_Y}{1 - C'_Y + B'_Y}$$

Den gule kopien beholder du/*Please keep the yellow page*

Tapir Uttrykk 12.05.2011

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10037

Dato/*Date:* 5/12 - 11 Side/*Page:* ~~17~~ 18

Emnekode/*Subject* Søk 3004 Antall ark/*Number of pages:* 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

2b cont.

$x(u,v)$

$y(u,v)$

i) $xu + uv - yx + y = 0$

ii) $u^2 - x^2 + v = 3$

iii) $udx + xdu + udv + vdu - ydx - xdy + dy = 0$

iv) $2udu - 2xdx + dv = 0$

$$2xdx = 2udu + dv$$

$$dx = \frac{\cancel{2}u}{\cancel{2}x}du + \frac{1}{2x}dv$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dx}{du}\right|_{dv=0} = \frac{\cancel{2}u}{\cancel{2}x}$$

$$\left.\frac{dx}{dv}\right|_{du=0} = \frac{1}{2x}$$

$$(1-x)dy + (u-x)dx + (x+v)du + udv = 0$$

$$(1-x)dy = -udv - (x+v)du - (u-x)\left(\frac{\cancel{2}u}{\cancel{2}x}du + \frac{1}{2x}dv\right)$$

$$\cancel{= (-u \tfrac{2u}{u}}$$

$$\cancel{= (-u - \tfrac{u^2}{x} + u)d}$$

$$= \left(-u - \frac{u}{2x} + \frac{1}{2}\right)dv + \left(-x - v - \frac{u^2}{x} + u\right)du$$

$$dy = \frac{-2u - \frac{u}{x} + 1}{2(1-x)}dv + \frac{u - x - v - \frac{u^2}{x}}{1-x}du$$

$$\left.\frac{dy}{dv}\right|_{du=0} = \frac{1 - 2u - \frac{u}{x}}{2(1-x)}$$

$$\left.\frac{dy}{du}\right|_{dv=0} = \frac{u - x - v - \frac{u^2}{x}}{1-x}$$

Kandidat nr./*Candidate no.* 10037

Dato/*Date:* 5/12 - 11 Side/*Page:* 19

Emnekode/*Subject* Søk 3004 Antall ark/*Number of pages:* 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

2c)

$$A = \begin{pmatrix} r & p \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

v p
I 7

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} (r \cdot r + 5p) & (rp + p3) \\ 5r + 15 & 5p + 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (r^2 + 5p) & p(r+3) \\ 5(r+3) & (9 + 5p) \end{pmatrix}$$

$$|A| = 3r - 5p$$ ✓

A har ikke en invers hvis $|A| = 0$:

$$|A| = 0 \Rightarrow 3r = 5p$$

$$r = \frac{5}{3}p$$

A har en invers hvis $r \neq \frac{5}{3}p$

Finner den inverse:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} r & p & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftarrow \frac{1}{r}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{p}{r} & \frac{1}{r} & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad -5$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{p}{r} & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 3 - 5\frac{p}{r} & -\frac{5}{r} & 1 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{3 - 5\frac{p}{r}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{p}{r} & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3r-5p} & \frac{r}{3r-5p} \end{array}\right) \leftarrow -\frac{p}{r}$$

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10037

Dato/*Date:* 5/12 - 11 Side/*Page:* 20

Emnekode/*Subject* Søk 3004 Antall ark/*Number of pages:* 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{3r-5p} & \frac{-p}{3r-5p} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3r-5p} & \frac{r}{3r-5p} \end{array}\right)$$

$$\cancel{\frac{1}{r} + \frac{5r}{p(3r-5p)} - \frac{p(3r-5p)+5r^2}{pr(3r-5p)}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3r-5p}\begin{pmatrix} 3 & -p \\ -5 & r \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{r} + \frac{5p}{r(3r-5p)}$$

$$= \frac{3r-5p+5p}{r(3r-5p)}$$

3a

$$\dot{x} = \frac{dx_t}{dt}$$

$$\dot{x} = rX_t(1-X_t) - \alpha X_t Y_t$$

$$\dot{y} = sY_t(1-Y_t) + \beta Y_t X_t$$

$r>0 \quad \alpha>0 \quad \beta>0 \quad s>0$

x isoklinene

$\dot{x} = 0$ når $X_t = 0$

og $r(1-X_t) - \alpha Y_t = 0$

$\Rightarrow Y_t = \frac{r}{\alpha}(1-X_t)$

y isoklinene

$\dot{y} = 0$ når $Y_t = 0$

og $s(1-Y_t) + \beta X_t = 0$

$Y_t = \frac{\beta}{s} X_t + 1$

indre likevekt $(X_t > 0$ og $Y_t > 0)$

(1) $-rX_t - \alpha Y_t = -r$

$rX_t + \alpha Y_t = r$

(2) $\beta X_t - sY_t = -s$

$$\Rightarrow X_t = \frac{\begin{vmatrix} r & \alpha \\ -s & -s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r & \alpha \\ \beta & -s \end{vmatrix}} = \frac{-rs + \alpha s}{-rs - \alpha\beta} = \frac{s(r-\alpha)}{rs + \alpha\beta}$$

$$Y_t = \frac{\begin{vmatrix} r & r \\ \beta & -s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r & \alpha \\ \beta & -s \end{vmatrix}} = \frac{-rs - r\beta}{-rs - \alpha\beta} = \frac{r(s+\beta)}{rs + \alpha\beta}$$

likevekt $(X_t^*, Y_t^*) = \left(\frac{s(r-\alpha)}{rs+\alpha\beta}, \frac{r(s+\beta)}{rs+\alpha\beta} \right)$

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10037

Dato/*Date:* 5/12 - 11 Side/*Page:* 22

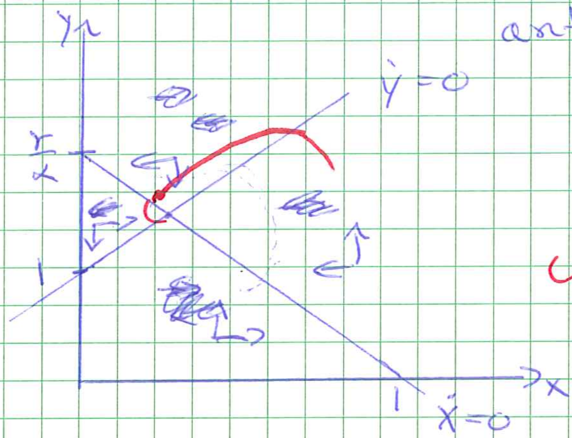
Emnekode/*Subject* Søk 3004 Antall ark/*Number of pages:* 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

3a cont

antar $1 < \frac{r}{\alpha}$ ✓



✓ ✓

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = r - 2rx - \alpha Y \qquad \frac{d\dot{x}}{dy} = -\alpha X_t \; ✓$$

$$\frac{d\dot{y}}{dx} = \beta Y_t \; ✓ \qquad \frac{d\dot{y}}{dy} = S - 2sY + \beta X$$

likevekten ~~kan~~ er ~~være~~ stabil, man starter i nærheten av likevekten og går i sirkelbevegelse inn mot likevekten, ~~men man kan~~ ~~også bevege~~

analytisk

$$J = \begin{pmatrix} r - 2rx^* - \alpha Y^* & -\alpha x^* \\ \beta Y^* & S - 2sY^* + \beta^* \end{pmatrix}$$

hvis likevekten er stabil vil trasen til J være negativ og determinanten positiv.

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10037

Dato/*Date:* 5/12 - 11 Side/*Page:* 23

Emnekode/*Subject* sok 3004 Antall ark/*Number of pages:* 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

3b $D_t = a + b p_t$

$S_t = \alpha + \beta P_{t-1}$

markedslikevekt:

$D_t = S_t \qquad a + b p_t = \alpha + \beta P_{t-1}$

$$P_t = \frac{(\alpha - a)}{b} + \frac{\beta}{b} P_{t-1}$$

$$\left(P_{t+1} = \frac{(\alpha - a)}{b} + \frac{\beta}{b} P_t\right)$$

førsteordens differenslikning

(10.5 i forelesning)

$$\Rightarrow P_t = \left(\frac{\beta}{b}\right)^t \left(p_0 - \frac{\frac{(\alpha - a)}{b}}{1 - \frac{\beta}{b}}\right) + \frac{\frac{(\alpha - a)}{b}}{1 - \frac{\beta}{b}}$$

$$P_t = \left(\frac{\beta}{b}\right)^t \left(p_0 - \frac{\alpha - a}{b - \beta}\right) + \frac{\alpha - a}{b - \beta}$$

hvis markedsprisen stabiliserer seg gjør den det der $P = \frac{\alpha - a}{b - \beta}$

ser at da vil ikke prisen endre seg.

Det er rimelig å anta ~~at~~ at

$b < 0$ og $\beta > 0$ ~~(at vi ikke har et~~

(at varen ikke er et giffengode)

$\Rightarrow \left(\frac{\beta}{b}\right) < 0$

hvis $\left|\frac{\beta}{b}\right| < 1$

vil markedsprisen stabilisere seg

da $\left(\frac{\beta}{b}\right)^t \to 0$ når $t \to \infty$

hvis $\left|\frac{\beta}{b}\right| > 1$ vil ikke markedsprisen stabilisere seg da $\left(\frac{\beta}{b}\right)^t \to \infty$ når $t \to \infty$

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10037

Dato/*Date:* 5/12 - 11 Side/*Page:* 24

Emnekode/*Subject* Søk 3004 Antall ark/*Number of pages:* 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

3c

$$X_{t+1} = F(X_t)$$

$$F(X_t) = (X_t - a)(b - X_t) \qquad X_t \geq 0$$

$b > a > 0$ $\qquad = bX_t - X_t^2 - ab + aX_t$

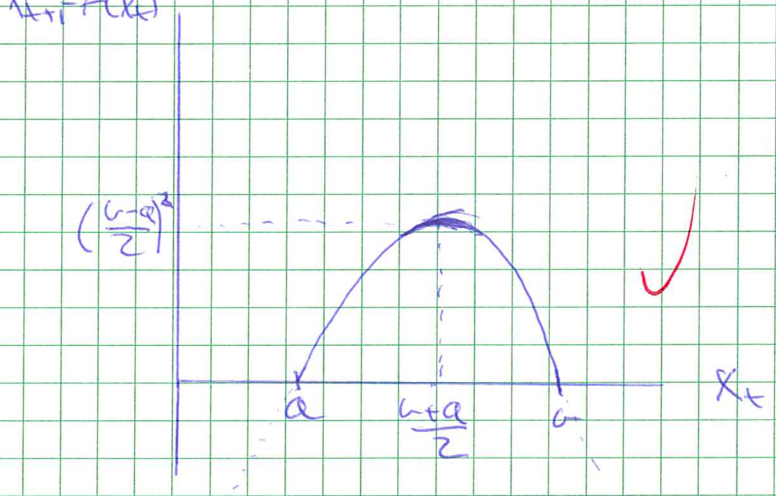
egenskaper til $F(X_t)$

$$\frac{\partial F(X_t)}{\partial X} = (b - X_t) - (X_t - a)$$

$$= b + a - 2X_t$$

populasjonen vil vokse saktere des større populasjonen blir og stagnere der $X_t = \frac{b+a}{2}$

hvis av en eller annen grunn populasjonen var større enn $\frac{b+a}{2}$ i utg.pkt vil den reduseres til: $x = \frac{b+a}{2}$.



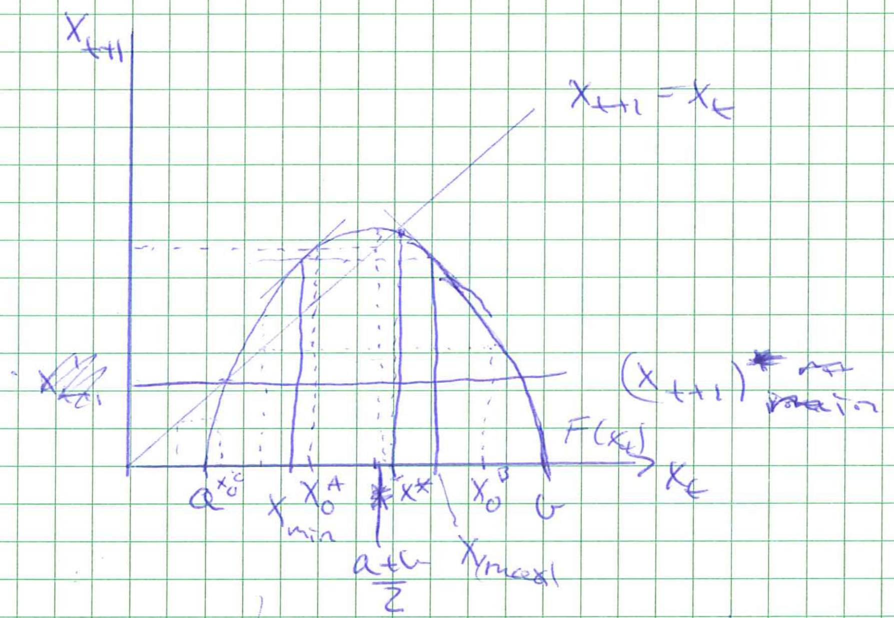
Kandidat nr./*Candidate no.* 10037

Dato/*Date:* 5/12 - 11 Side/*Page:* 25

Emnekode/*Subject* søk 3004 Antall ark/*Number of pages:* 25

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner



huis $x > x_{t+1}'$ vil populasjonen gå mot $x^* = x_t = x_{t+1}$ huis $|F'(x^*)| < 1$

$|b + a - 2x^*| < 1$

populasjonen vil gå mot en likevekt huis $|b+a-2x^*| < 1$

$(x^* = p_t = p_{t+1})$

og $x_{t+1} > x_{t+1\,(min)}$