NTNU

Det skapende universitet

Institutt for samfunnsøkonomi

Eksamensoppgave i SØK3004 – Videregående matematisk analyse

Faglig kontakt under eksamen: Snorre Lindset

Tlf.: 73 59 13 95

Eksamensdato: 16. desember 2013

Eksamenstid (fra-til): 5 timer (09.00 – 14.00)

Sensurdato: 16. januar 2014

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C /Flg formelsamling: Knut Sydsæter, Arne Strøm og Peter Berck (2006): Matematisk formelsamling for økonomer, 4utg. Gyldendal akademiske. Knut Sydsæter, Arne Strøm, og Peter Berck (2005): Economists' mathematical manual, Berlin. Enkel kalkulator Citizen SR-270x, HP 30S eller SR-270X College

Målform/språk: Bokmål og engelsk

Antall sider: 7 (inkl. forside)

Antall sider vedlegg: 0

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Eksamen i SØK 3004 Videregående Matematisk Analyse (H2013)

Ta de forutsetninger du måtte finne nødvendig. %-satsene bak oppgavenummereringen er kun ment som en *indikasjon* på hvordan de ulike oppgavene kommer til å bli vektet ved sensuren.

Oppgave 1 (20%) Løs følgende integraler:

a)

$$\int \ln(x^2) 3t^2 dt$$

b)

$$\int \frac{x^2 + x^3}{\sqrt{x}} dx$$

c)

$$\int_0^1 \int_0^1 1 dx dy$$

d) Gi en geometrisk fortolkning av integralet i spørsmål c).

Oppgave 2 (20%)

a) Løs likningssettet

$$\begin{aligned} -3x_1 - 6x_2 + 6x_4 &= 15 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 &= -8 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 7x_4 &= -13 \end{aligned}$$

b) Bestem rangen til matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

c) La $\mathbf{A}$ være en kvadratisk matrise. Finn $\mathbf{A}^{-1}$ når $\mathbf{A}^2 = \alpha\mathbf{I}$, hvor $\mathbf{I}$ er identitetsmatrisen og $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

d) La $\mathbf{A}$ være en 2×2-matrise. Du får oppgitt at $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = 3$ og $|A| = 2$. Bestem de to egenverdiene (λ_1 og λ_2) til matrisen $\mathbf{A}$.

Oppgave 3 (20%) En konsument har to goder tilgjengelig for konsum. Antall enheter konsumert kan sammenfattes i konsumvektoren

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Prisen (i kroner) for hvert av de to godene er

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Tiden (målt i timer) det tar å konsumere hvert av de to godene er

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Konsumenten har totalt kroner 350 tilgjengelig for konsum og han har 80 timer tilgjengelig. Konsumentens nytte av konsum er gitt ved

$$U(\mathbf{x}) = \ln x_1 + \ln x_2.$$

a) Formuler konsumentens optimeringsproblem.

b) Sett opp Karush-Kuhn-Tucker-betingelsene for $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)'$.

c) Finn den optimale konsumvektoren $\mathbf{x}^*$ (du trenger ikke å vise at Lagrangefunksjonen er konkav).

Oppgave 4 (20%) Et gruveselskap har en rett til å utvinne et edelmetall. Utvinningsretten utløper om ett år. Profittraten av utvinningen på tid t, $0 \leq t \leq 1$, er

$$G(t) = e^{2rt^2},$$

hvor r er en konstant som er lik diskonteringsrenten (kontinuerlig rente uttrykt på årsbasis).

a) Forklar <u>kort</u> hvorfor dagens verdi (nåverdien) av utvinningsretten kan skrives slik:

$$\pi = \int_0^1 e^{-rt+2rt^2} dt.$$

La $F(t) = e^{-rt+2rt^2}$ være den diskonterte profittraten.

b) Finn en andreordens Taylor-approksimasjon av $F(t)$ rundt punktet $\frac{1}{2}$.

c) Bruk Taylor-approksimasjonen fra spørsmål b) til å finne en tilnærmet verdi for utvinningsretten når $r = 0{,}1$. (I følge Maple er det eksakte svaret $\pi = 1{,}017349119$.)

Oppgave 5 (20%)

a) Vis at $x = Ct - C^2$ er en løsning for differensiallikningen $\dot{x}^2 = t\dot{x} - x$ for alle verdier av konstanten C. Vis at dette ikke er en generell løsning siden også $x = \frac{1}{4}t^2$ er en løsning.

b) Funksjonen $x = x(t)$ tilfredsstiller $x(0) = 0$ og differensiallikningen $\dot{x} = (1 + x^2)t$ for alle t i et åpent interval I rundt 0. Bevis at

1. $t = 0$ er et globalt minimumspunkt for $x(t)$ i I
2. funksjonen x er konveks i I.

Hint: Du trenger ikke å løse differensiallikningen for å besvare oppgaven.

Exam in SØK 3004 Advanced Mathematics (H2013)

Make the assumptions you find necessary. %-points associated with each problem give an *indication* of how the problem will count on the final grading.

Problem 1 (20%) Solve the following integrals:

a)

$$\int \ln(x^2)3t^2 dt$$

b)

$$\int \frac{x^2 + x^3}{\sqrt{x}} dx$$

c)

$$\int_0^1 \int_0^1 1 dx dy$$

d) Give a geometric interpretation of the integral in question c).

Problem 2 (20%)

a) Solve the set of equations

$$\begin{aligned} -3x_1 - 6x_2 + 6x_4 &= 15 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 &= -8 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 7x_4 &= -13 \end{aligned}$$

b) Determine the rank of the matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

c) Let $\mathbf{A}$ be a square matrix. Find $\mathbf{A}^{-1}$ when $\mathbf{A}^2 = \alpha\mathbf{I}$, where $\mathbf{I}$ is the identity matrix and $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

d) Let $\mathbf{A}$ be a 2×2-matrix. You are told that $\text{tr}(\mathbf{A}) = 3$ og $|A| = 2$. Find the two eigenvalues (λ_1 og λ_2) of the matrix $\mathbf{A}$.

Problem 3 (20%) A consumer can consume two goods. The number of units of the two goods he consumes is given in the consumption vector

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

The prices (in kroner) for each of the two goods are

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

The time (in hours) it takes to consume one unit of each good is given by

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

The consumer has a total of 350 kroner and 80 hours available for consumption. The consumer's utility of consumption is given by

$$U(\mathbf{x}) = \ln x_1 + \ln x_2.$$

a) Write down the consumer's optimization problem.

b) State the Karush-Kuhn-Tucker-conditions for $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)'$.

c) Find the optimal consumption vector $\mathbf{x}^*$ (you do not have to show that the Lagrange function is concave).

Problem 4 (20%) A mining company has the right to extract a noble metal. This right expires in one year. The time t, $0 \leq t \leq 1$, profit rate from extraction is

$$G(t) = e^{2rt^2},$$

where r is a constant equal to the discount rate (annualized continuous compounding).

a) Give a *short* explanation for why the present value of the extraction right can be written as follows:

$$\pi = \int_0^1 e^{-rt+2rt^2} dt.$$

Let $F(t) = e^{-rt+2rt^2}$ be the discounted profit rate.

b) Find a second-order Taylor approximation of $F(t)$ about the point $\frac{1}{2}$.

c) Use the Taylor approximation from question b) to find an approximate value of the extraction right when $r = 0{,}1$. (According to Maple, the exact answer is $\pi = 1{,}017349119$.)

Problem 5 (20%)

a) Show that $x = Ct - C^2$ is a solution to the differential equation $\dot{x}^2 = t\dot{x} - x$ for all values of the constant C. Then show that it is not the general solution because $x = \frac{1}{4}t^2$ is also a solution.

b) The function $x = x(t)$ satisfies $x(0) = 0$ and the differential equation $\dot{x} = (1 + x^2)t$ for all t in an open interval I around 0. Prove that

1. $t = 0$ is a global minimum point for $x(t)$ in I
2. the function x is convex on I.

Hint: You do not have to solve the equation to answer the question.

#1

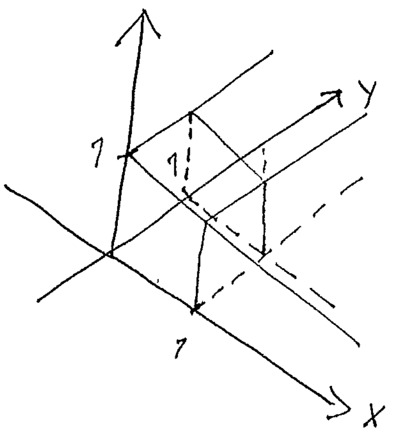
a) $\int \ln(x^2)\, 3t^2\, dt = \ln(x^2) \int 3t^2\, dt = \underline{\underline{\ln(x^2)\, t^3 + C}}$

b) $\int \frac{x^2 + x^3}{\sqrt{x}}\, dx = \int x^{3/2}\, dx + \int x^{5/2}\, dx$

$= \underline{\underline{\frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{2}{7} x^{7/2} + C}}$

c) $\int_0^1 \int_0^1 1\, dx\, dy = \int_0^1 \left[x + C_1 \right]_0^1 dy = \int_0^1 1\, dy = \left[y + C_2 \right]_0^1 = \underline{\underline{1}}$

d)



Integralet gir oss volumet av en boks med grunnflate 1x1 og høyde 1 : 1x1x1 = 1.

#2

a) Skriver systemet på formen

$Ax = b$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & -4 \\ 4 & 8 & 2 & -7 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ og } b = \begin{bmatrix} 15 \\ -8 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & -6 & 0 & 6 & 15 \\ 2 & 4 & 1 & -4 & -8 \\ 4 & 8 & 2 & -7 & -13 \end{array}\right] \begin{array}{l} :(-3) \\ \\ \cdot 2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 0 & -6 & -15 \\ 2 & 4 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} +6 \\ +4 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Sett $x_2 = s$ (kan velges fritt):

$$x_1 = 1 - 2s$$
$$x_2 = s$$
$$x_3 = 2$$
$$x_4 = 3$$

b) Har at

$$A^2 = \alpha I \Leftrightarrow AA = \alpha I \Leftrightarrow AAA^{-1} = \alpha I A^{-1} \Leftrightarrow$$
$$A = \alpha A^{-1} \Leftrightarrow \underline{\underline{A^{-1} = \frac{1}{\alpha} A}}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 8 & 6 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow$ rang$(A) = 2$

d) Vi vet at $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 3$

og at

$$|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{2}{\lambda_2}$$

Da får vi

$$\frac{2}{\lambda_2} + \lambda_2 = 3 \Leftrightarrow \lambda_2^2 - 3\lambda_2 + 2 = 0,$$

$$\lambda_2 = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = 1, 2$$

Innsatt i λ_1:

$$\lambda_1 = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{eller} \quad \lambda_1 = \frac{2}{2} = 1$$

$\Rightarrow$ Egenverdiene er $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

#3

a) $\max_{x_1, x_2} \ln x_1 + \ln x_2$

s.t.

$$10x_1 + 5x_2 \leq 350$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 80$$
$$-x_1 \leq 0$$
$$-x_2 \leq 0$$

b)

Lagrangefunksjonen er

$$\mathcal{L} = \ln x_1 + \ln x_2 - \lambda_1 (10x_1 + 5x_2 - 350) - \lambda_2 (x_1 + 2x_2 - 80) - \mu_1(-x_1) - \mu_2(-x_2)$$

KKT-betingelsene blir

$$\mathcal{L}_{x_1} = \frac{1}{x_1} - 10\lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1 = 0$$

$$\mathcal{L}_{x_2} = \frac{1}{x_2} - 5\lambda_1 - 2\lambda_2 + \mu_2 = 0$$

$\lambda_1 \geq 0$ med $\lambda_1 = 0$ hvis $10x_1 + 5x_2 < 350$

$\lambda_2 \geq 0$ med $\lambda_2 = 0$ hvis $x_1 + 2x_2 < 80$

$\mu_1 \geq 0$ med $\mu_1 = 0$ hvis $x_1 > 0$

$\mu_2 \geq 0$ med $\mu_2 = 0$ hvis $x_2 > 0$

c)

Siden

$$\lim_{x_i \to 0^+} \frac{\partial U(\bar{x})}{\partial x_i} = \infty \quad , i=1,2,$$

vil $x_1, x_2 > 0$ og $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Vi har da 4 muligheter å undersøke $(4 = 2^2)$:

$\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = 0}$

KKT gir da at

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = 0.$$

Dette gir ikke mening.

$\underline{\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0}$

KKT gir at

$$\frac{1}{x_1} - \lambda_2 = 0 \iff x_1 = \frac{1}{\lambda_2}$$

$$\frac{1}{x_2} - 2\lambda_2 = 0 \iff x_2 = \frac{1}{2\lambda_2}$$

Innsatt i den aktive bibetingelsen:

$$\frac{1}{\lambda_2} + \frac{2}{2\lambda_2} = 80 \iff \lambda_2 = \frac{1}{40}.$$

Det gir

$$x_1 = 40 \text{ og } x_2 = 20.$$

Innsatt i bibetingelsen med slakk:

$$10 \cdot 40 + 5 \cdot 20 = 500 > 350$$

$\Rightarrow$ Ikke aktuell kandidat.

$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 = 0$

KKT gir at

$$\frac{1}{x_1} - 10\lambda_1 = 0 \iff x_1 = \frac{1}{10\lambda_1}$$

$$\frac{1}{x_2} - 5\lambda_1 = 0 \iff x_2 = \frac{1}{5\lambda_1}$$

Innsatt i den aktive bibetingelsen:

$$\frac{10}{10\lambda_1} + \frac{5}{5\lambda_1} = 350 \iff \lambda_1 = \frac{1}{175}$$

Innsatt i x_1 og x_2:

$$x_1 = 17{,}5\ ,\ x_2 = 35.$$

Innsatt i bibetingelse med slakk:

$$17{,}5 + 2 \cdot 35 = 87{,}5 > 80$$

$\Rightarrow$ Ikke aktuell kandidat.

$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$

De to første bibetingelsene er aktive:

$$\begin{bmatrix} 10x_1 + 5x_2 = 350 \\ x_1 + 2x_2 = 80 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x_1 = 20 \\ x_2 = 30 \end{bmatrix}$$

Disse kandidatene gir at

$$\begin{bmatrix} 10\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{20} \\ 5\lambda_1 + 2\lambda_2 = \frac{1}{30} \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} \lambda_1 = \frac{1}{225} > 0 \\ \lambda_2 = \frac{1}{180} > 0 \end{bmatrix}$$

Siden det er oppgitt at Lagrangefunksjonen er konkav og $\underline{x_1 = 20,\ x_2 = 30}$ er den eneste kandidaten, er dette optimum.

4

a) Den diskonterte profittraten er

$$e^{2rt^2} \cdot e^{-rt} = e^{-rt+2rt^2}.$$

Nåverdien er "summen" av alle profittene:

$$\pi = \int_0^1 e^{-rt+2rt^2} dt.$$

b) $F(t) = e^{-rt+2rt^2}$, $F(\frac{1}{2}) = 1$

$F'(t) = (4rt-r)e^{-rt+2rt^2}$, $F'(\frac{1}{2}) = r \cdot 1 = r$

$F''(t) = 4re^{-rt+2rt^2} + (4rt-r)^2 e^{-rt+2rt^2}$,

$F''(\frac{1}{2}) = 4r + r^2$.

$$\underline{\underline{F(t) \approx 1 + r(t-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}(4r+r^2)(t-\tfrac{1}{2})^2}}.$$

c) $$\pi = \int_0^1 F(t)dt \approx \int_0^1 \left(1 + r(t-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}(4r+r^2)(t-\tfrac{1}{2})^2\right) dt$$

$$= \left[t + r(\tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{2}t) + \tfrac{1}{2}(4r+r^2)\tfrac{1}{3}(t-\tfrac{1}{2})^3 + C \right]_0^1$$

$$= \left[1 + \tfrac{1}{2}(4r+r^2)\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{8}\right] - \left[-\tfrac{1}{2}(4r+r^2)\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{8}\right]$$

$$= \underline{1 + \tfrac{1}{24}(4r+r^2)}$$

Med $r = 0{,}1$:

$$\pi \approx 1 + \tfrac{1}{24}(4 \cdot 0{,}1 + 0{,}1^2) = \underline{\underline{1{,}01708333\ldots}}.$$

5

a) $x = Ct - C^2$, $\dot{x}^2 = t\dot{x} - x$

$\dot{x} = C$, $\dot{x}^2 = C^2$

$\dot{x}^2 = t\cdot C - (Ct - C^2) = C^2$, altså en løsning på likningen $\dot{x}^2 = t\dot{x} - x$ er $x = Ct - C^2$.

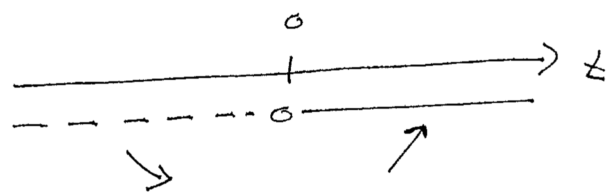
$x = \frac{1}{4}t^2$. $\dot{x} = \frac{1}{2}t$, $\dot{x}^2 = \frac{1}{4}t^2$.

$\dot{x}^2 = t\left(\frac{1}{2}t\right) - \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{4}t^2$, altså også en løsning. Det finnes ingen C som gjør at

$Ct - C^2 = \frac{1}{4}t^2 \Rightarrow x = Ct - C^2$ er ikke den generelle løsningen.

b) 1) Vi har at $x^2 = (x)^2 \geq 0$. Da er ~~også~~ $(1+x^2) > 0$.

$\dot{x} = (1+x^2)t$



x

Siden $\dot{x} < 0$ for $t < 0$ og $\dot{x} > 0$ for $t > 0$, er $t = 0$ et globalt minimumspunkt.

2) $\ddot{x} = \cancel{2x}\, 2x\cdot\dot{x}\,t + (1+x^2) = 2xt\underbrace{(1+x^2)t}_{\dot{x}} + (1+x^2)$

$= (1+x^2)(1+2xt^2)$.

Siden $x(0) = 0$ er et minimumspunkt, er $x \geq 0$.
Da er $(1+x^2) > 0$ og $(1+2xt^2) > 0$

$\Rightarrow (1+x^2)(1+2xt^2) > 0$. Altså er $\ddot{x} > 0 \Rightarrow$

x er konveks.