1 a) $\int_0^2 (x-1)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x + C\right]_0^2 = \left[\frac{1}{2}\cdot 2^2 - 2\right] - \left[\frac{1}{2}\cdot 0^2 - 0\right]$

$= \frac{1}{2}\cdot 4 - 2 = \underline{\underline{0}}$

b) $\int \frac{x+4}{(x+3)^2} dx$

Sett $u = x+3 \Rightarrow du = dx$

$\hookrightarrow x = u-3$

Det gir

$$\int \frac{x+4}{(x+3)^2} dx = \int \frac{\overbrace{u+1}^{u-3+4}}{u^2} du = \int \frac{u}{u^2} du + \int \frac{1}{u^2} du$$

$$= \int \frac{1}{u} du + \int \frac{1}{u^2} du = \ln|u| - \frac{1}{u} + C$$

$$= \underline{\underline{\ln|x+3| - \frac{1}{x+3} + C}}$$

c) $\int \frac{x}{e^x} dx = \int x e^{-x} dx.$

Bruk delvis integrasjon og sett $f = x$ og $g' = e^{-x}$.

$$\int x e^{-x} dx = x(-e^{-x}) - \int 1\cdot(-e^{-x}) dx$$

$$= \underline{\underline{-xe^{-x} - e^{-x} + C}}$$

d) $\frac{d}{dt}\int_0^t xe^{-t}\,dx$

Integranden er på formen $f(x,t)$. Vi får da at

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(x,t)\,dx = f(t,t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx$$

Innsatt får vi

$$\frac{d}{dt}\int_0^t xe^{-t}\,dx = te^{-t} + \int_0^t (-xe^{-t})\,dx$$

$$= te^{-t} - \left[\tfrac{1}{2}x^2e^{-t} + C\right]_0^t = \underline{\underline{te^{-t} - \tfrac{1}{2}t^2e^{-t}}}$$

<u>2</u> Vi har at

$$A + B = 1{,}4$$
$$A + C = 0{,}9$$
$$B + C = 1{,}7$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1{,}4 \\ 1 & 0 & 1 & 0{,}9 \\ 0 & 1 & 1 & 1{,}7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1{,}4 \\ 0 & -1 & 1 & -0{,}5 \\ 0 & 1 & 1 & 1{,}7 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1{,}4 \\ 0 & 1 & -1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 2 & 1{,}2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0{,}3 \\ 0 & 1 & 0 & 1{,}1 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}6 \end{array}\right]$$

Vi har at

$$\underline{\underline{A = 0{,}3}}$$
$$\underline{\underline{B = 1{,}1}}$$
$$\underline{\underline{C = 0{,}6}}$$

b) X er $n \times m$

$\underbrace{\underset{n\times m}{X}\,\underset{m\times n}{X^T}}_{n\times n}$. Da er XX^T en $n\times n$-matrise

c) A er en symmetrisk matrise hvis $A = A^T$.

$(XX^T)^T = (X^T)^T(X)^T = XX^T$.

Altså er den symmetrisk.

(Har brukt at $(AB)^T = B^T A^T$).

③

a) Vi har at $A = \begin{bmatrix} f_1' & f_2' \\ g_1' & g_2' \end{bmatrix}$, hvor

$f = \overset{\circ}{x}$ og $g = \overset{\circ}{y}$. Her får vi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix} = A(P) \quad (P = (0,0)).$$

Likevektspunktet er et sadelpunkt hvis

$|A(P)| < 0.$

$|A(P)| = -\alpha - 1$

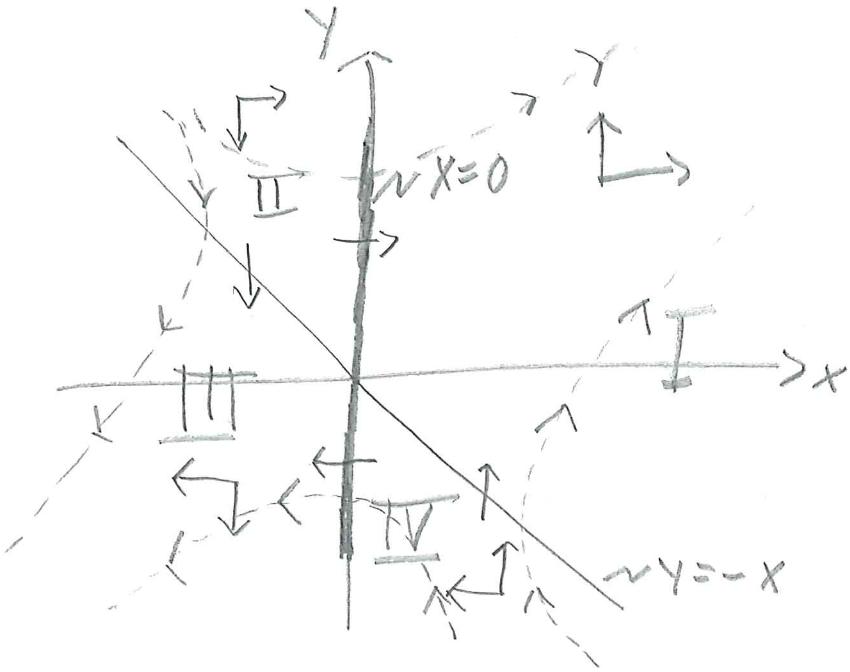
$-\alpha - 1 < 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha > -1}}$

b) For $\alpha = 0$ får vi at

$\overset{\circ}{x} = x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$

$\overset{\circ}{y} = x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Nullisoklinene er $\underline{\underline{y = -x}}$ og $\underline{\underline{x = 0}}$



c)

Sektor 1:

$$y > -x \Rightarrow \dot{x} > 0$$

$$x > 0 \Rightarrow \dot{y} > 0$$

Sektor 2:

$$y > -x \Rightarrow \dot{x} > 0$$

$$x < 0 \Rightarrow \dot{y} < 0$$

Sektor 3:

$$y < -x \Rightarrow \dot{x} < 0$$

$$x < 0 \Rightarrow \dot{y} < 0$$

Sektor 4:

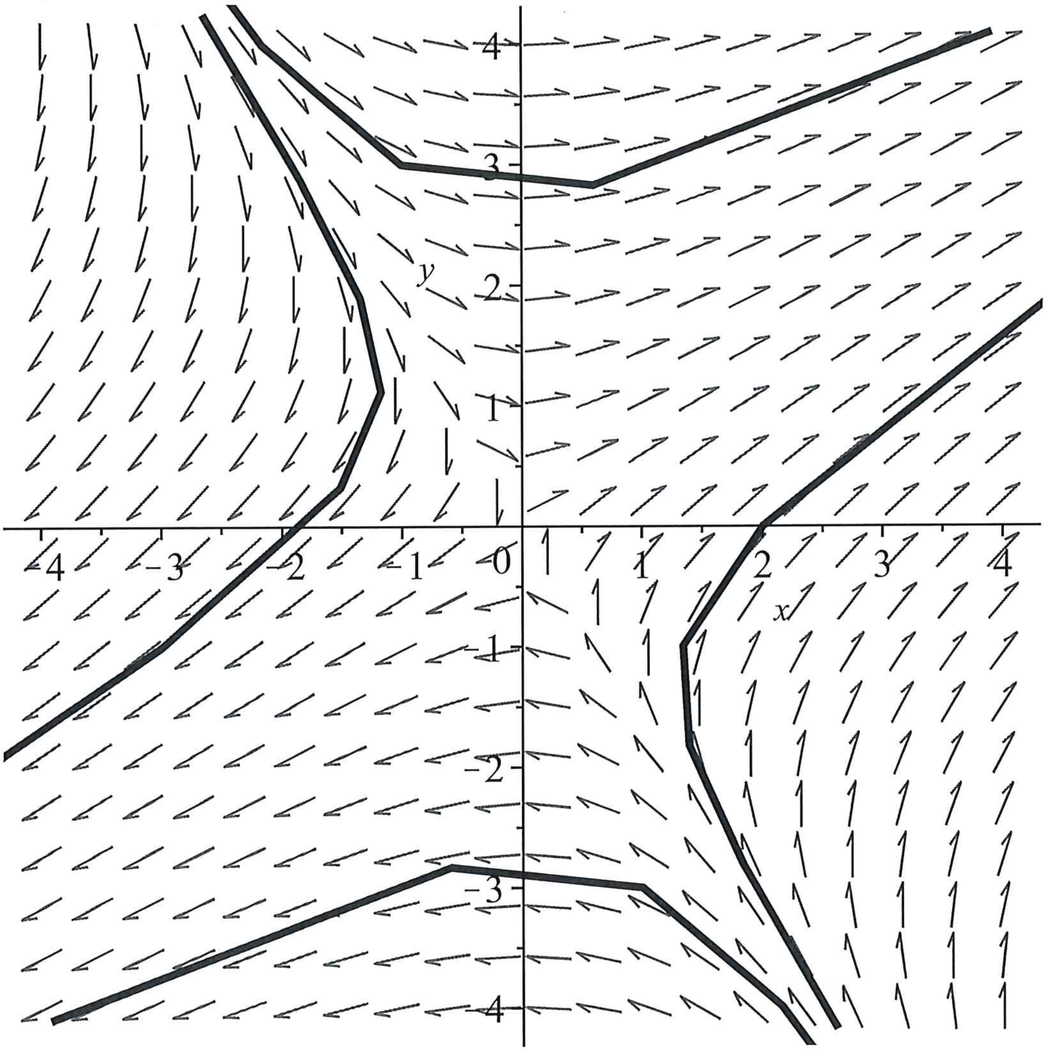
$$y < -x \Rightarrow \dot{x} < 0$$

$$x > 0 \Rightarrow \dot{y} > 0$$

with(*DEtools*) :
with(*plots*) :
$sys := \mathrm{D}(x)(t) = x(t) + y(t),\quad \mathrm{D}(y)(t) = x(t);$

$$sys := \mathrm{D}(x)(t) = x(t) + y(t), \mathrm{D}(y)(t) = x(t) \tag{1}$$

$phaseportrait([sys], [x, y], t = -10..20, [[x(0) = -1, y(0) = 3], [x(0) = -3, y(0) = -1], [x(0) = 1, y(0) = -3], [x(0) = 2, y(0) = 0]], x = -4..4, y = -4..4, linecolor = blue);$



d) $A(p) - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}$

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Den negative egenverdien er $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Innsatt for λ i $A(p) - \lambda I$ gir

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 0 & \underbrace{\frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{2}{1+\sqrt{5}}}_{=0} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La $\bar{v}$ være egenvektoren. v_2 kan velges fritt: $v_2 = s$. Da blir

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} v_1 + s = 0 \Leftrightarrow v_1 = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} s$$

$$\hookrightarrow \bar{v} = s \begin{bmatrix} -\frac{2}{1+\sqrt{5}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

e) Kurven C tangerer linjen L som "går i samme retning" som vektoren

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{1+\sqrt{5}} \\ 1 \end{bmatrix},$$

(4)

$$f(x,y) = -x^2 - y^2$$

$$\max_{x,y} f(x,y)$$

s.t. $x - 3y \leq -10$

Lagrangefunksjonen er

$$\mathcal{L} = -x^2 - y^2 - \lambda(x - 3y + 10)$$

Setter opp KKT-betingelsene:

$$\mathcal{L}_x = -2x - \lambda = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\lambda$$

$$\mathcal{L}_y = -2y + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}\lambda$$

$\lambda \geq 0$ med $\lambda = 0$ når $x - 3y < -10$

$\underline{\lambda = 0}$

$x = y = 0$, men da er ikke bibetingelsen tilfredsstilt: $0 - 3 \cdot 0 = 0 \nleq -10$.

$\underline{\lambda > 0}$

$$\lambda = -2x$$

$$y = \frac{3}{2}(-2x) = -3x$$

$$x - 3(-3x) = -10 \Leftrightarrow 10x = -10 \Leftrightarrow \underline{x = -1}$$

$$y = -3(-1) \underline{= 3}$$

Punktet $(-1,3)$ er den eneste kandidaten til optimal løsning. For å undersøke om det er et maksimumspunkt, finner vi Hessematrisen til $\mathcal{L}$:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\lambda\lambda} & \mathcal{L}_{\lambda x} & \mathcal{L}_{\lambda y} \\ \mathcal{L}_{\lambda x} & \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} \\ \mathcal{L}_{\lambda y} & \mathcal{L}_{xy} & \mathcal{L}_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Her er antall bibetingelser $m=1$. Videre er $r=m+1=1+1=2=n$ (antall ukjente, x og y).

Da må vi beregne determinanten til Hessematrisen:

eksparndert langs første rad.

$$B_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{(1+2)}(-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+3)}\cdot 3\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-2) - 3\cdot 0 + 3\big((-1)(0)-(-2)(3)\big) = 20$$

$(-1)^2 \cdot B_2 = 1\cdot 20 = 20 > 0 \Rightarrow$ Lokalt maks. pkt.

Maksimeringsproblemet har løsning $\underline{(-1,3)}$

Som gir $f^* = f(-1,3) = -(-1)^2 - (3^2) = \underline{\underline{-10}}$

(5)

En profittmaksimerende bedrift vil også minimere kostnader. Antar derfor at bedriften

- er profittmaksimerende
- er pristaker.

Bedriften løser problemet

$$\min_{K,L} \; rK + wL$$

s.t.

$$Q = f(K,L)$$

Dette gir Lagrangefunksjonen

$$\mathcal{L} = rK + wL - \lambda(f(K,L) - Q).$$

La C^* være kostnadsfunksjonen.
Omhyllingsteoremet sier at

$$\frac{\partial c^*}{\partial r} = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}\right]_{K=K^*, L=L^*} = [K]_{K=K^*} = K^*.$$

For marginale endringer i r vil altså kostnaden øke proporsjonalt med hvor mye kapital bedriften bruker i produksjonen (K^*).