#1

$$Z = \int_0^{\infty} e^{-rs} D(s)\,ds$$

a) i) $D(s) = \frac{1}{\tau}$, $0 \leq s \leq \tau$, $D(s) = 0$ for $s > \tau$.

$$Z = \int_0^{\tau} e^{-rs}\frac{1}{\tau}\,ds + \underbrace{\int_{\tau}^{\infty} e^{-rs}\cdot 0\,ds}_{=0}$$

$$= \left[-\frac{1}{r}e^{-rs}\frac{1}{\tau} + C\right]_0^{\tau} = -\frac{1}{r\tau}e^{-r\tau} - \left(-\frac{1}{r}e^{-r\cdot 0}\frac{1}{\tau}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1-e^{-r\tau}}{r\tau}}}.$$

ii)
$$Z = \int_0^{\tau} e^{-rs}\frac{2(\tau - s)}{\tau^2}\,ds + \underbrace{\int_{\tau}^{\infty} e^{-rs}\cdot 0\,ds}_{=0}$$

$$= \underbrace{\int_0^{\tau} e^{-rs}\frac{2}{\tau}\,ds}_{①} - \underbrace{\int_0^{\tau} e^{-rs}\frac{2s}{\tau^2}\,ds}_{②}$$

Finner først ①:

$$\int_0^{\tau} e^{-rs}\frac{2}{\tau}\,ds = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} e^{-rs}\,ds = \frac{2}{\tau}\left[-\frac{1}{r}e^{-rs} + C_1\right]_0^{\tau}$$

$$= \frac{2}{\tau}\left[-\frac{1}{r}e^{-r\tau} - \left(-\frac{1}{r}e^{-r\cdot 0}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{r\tau}\left[1 - e^{-r\tau}\right].$$

Finner så ②:

$$\int_0^\tau e^{-rs}\frac{2s}{\tau^2}\,ds = \frac{2}{\tau^2}\int_0^\tau e^{-rs}s\,ds.$$

Bruk delvis integrasjon for å bestemme

$\int e^{-rs}s\,ds$: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$

Sett $e^{-rs} = g'$ og $s = f$:

$$\int e^{-rs}s\,ds = -\frac{1}{r}e^{-rs}s - \int -\frac{1}{r}e^{-rs}ds$$

$$= -\frac{1}{r}e^{-rs}s - \frac{1}{r^2}e^{-rs} + C_2.$$

Da får vi at

$$\frac{2}{\tau^2}\int_0^\tau e^{-rs}s\,ds = \frac{2}{\tau^2}\left[-\frac{1}{r}e^{-r\tau}\tau - \frac{1}{r^2}e^{-r\tau} - \left(-\frac{1}{r^2}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{r\tau}\left[-e^{-r\tau} - \frac{1}{r\tau}e^{-r\tau} + \frac{1}{r\tau}\right].$$

Ved å sette sammen ① og ② får vi at

$$Z = \frac{2}{r\tau}\left[1 - e^{-r\tau} - \left(-e^{-r\tau} - \frac{1}{r\tau}e^{-r\tau} + \frac{1}{r\tau}\right)\right]$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{r\tau}\left[1 - \frac{1}{r\tau}\left(1 - e^{-r\tau}\right)\right]}}.$$

b) Vi ser at

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{1-e^{-r\tau}}{r\tau} = 0 \qquad \left(\frac{1-0}{\infty}\right)$$

og

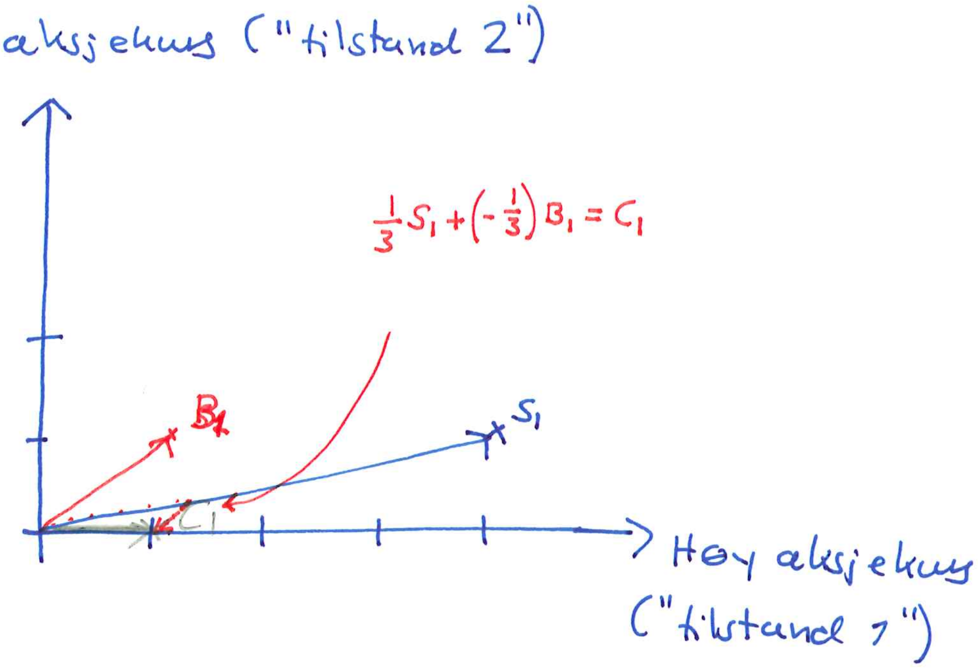
$$\lim_{\tau \to \infty} \underbrace{\underbrace{\frac{2}{r\tau}}_{\to 0}\underbrace{\left[1-\underbrace{\frac{1}{r\tau}\underbrace{(1-\underbrace{e^{-r\tau}}_{\to 0})}_{\to 1}}_{\to 0}\right]}_{\to 1}}_{\to 0} = 0$$

Vi ser at for disse to avskrivningsreglene går nå verdien av avskrivningene mot null når avskrivningshorisonten τ går mot ∞.

Dette gjelder ikke for den (de) avskrivningsreglene vi "normalt" bruker i Norge.

#2

a), b), f)



c)

$$x\begin{bmatrix} S^H \\ S^L \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^H - k \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dette kan vi skrive slik:

$$\begin{bmatrix} S^H & 1 \\ S^L & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^H - k \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jeg bruker elementære rekkeoperasjoner:

$$\left[\begin{array}{cc|c} S^H & 1 & S^H - k \\ S^L & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} S^H - S^L & 0 & S^H - k \\ S^L & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{S^H - k}{S^H - S^L} \\ S^L & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{S^H - k}{S^H - S^L} \\ 0 & 1 & \frac{(k - S^H)S^L}{S^H - S^L} \end{array}\right]$$

Da har vi at

$$x = \frac{S^H - K}{S^H - S^L}$$

$$y = \frac{(K - S^H)S^L}{S^H - S^L}.$$

d) Hvis $S_1 = S^H$ har porteføljen verdi

$$\underbrace{\frac{S^H - K}{S^H - S^L}}_{x} \cdot S^H + \underbrace{\frac{(K - S^H)S^L}{S^H - S^L}}_{y} \cdot 1 = \frac{S^{H^2} - KS^H + KS^H - S^H S^L}{S^H - S^L}$$

$$= \frac{(S^H - S^L)(S^H - K)}{S^H - S^L} = S^H - K. \quad (= C^H)$$

Hvis $S_1 = S^L$ har porteføljen verdi

$$\frac{S^H - K}{S^H - S^L} S^L + \frac{(K - S^H)S^L}{S^H - S^L} \cdot 1 = 0 \quad (= C^L)$$

↳ Porteføljen har samme verdi på tidspunkt 1 (den replikerer verdien av opsjonen).

e) $$x = \frac{s^H - K}{s^H - s^L} = \frac{us - K}{us - ds} = \underline{\underline{\frac{u - \frac{K}{s}}{u - d}}}$$

$$y = \frac{(K - s^H)s^L}{s^H - s^L} = \frac{(K - us)ds}{us - ds} = \underline{\underline{\frac{(K - us)d}{u - d}}}$$

$$x = \frac{2 - \frac{3}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$y = \frac{(3 - 2 \cdot 2)\,1/2}{2 - 1/2} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

g) $$xS + Y\frac{1}{1+r} = \frac{us - K}{u - d} + \frac{(K - us)d}{(u - d)(1 + r)}$$

$$= \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 - 0{,}5} + \frac{(3 - 2 \cdot 2) \cdot 0{,}5}{(2 - 0{,}5)(1{,}1)} = \frac{1}{1{,}5} - \frac{0{,}5}{1{,}5 \cdot 1{,}1}$$

$$= \frac{1{,}1 - 0{,}5}{1{,}5 \cdot 1{,}1} = \frac{0{,}6}{1{,}5 \cdot 1{,}1} = \frac{2/5}{1{,}1} \approx \underline{\underline{0{,}3636}}$$

Siden det på tidspunkt 0 koster 0,3636 å konstruere en portefølje som har samme verdi på tidspunkt 1 som opsjonen, bør også opsjonen koste 0,3636 på tidspunkt 0. Hvis ikke, så har vi en arbitrasje-mulighet.

#3

a) $$\frac{dx}{dt} = -t^2 x^2$$ (separabel diff. likn.)

$$\Leftrightarrow$$

$$-\frac{dx}{x^2} = t^2 dt$$

$$-\int \frac{dx}{x^2} = \int t^2 dt \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{3}t^3 + C \Leftrightarrow x = \frac{1}{1/3\, t^3 + C}$$

$$x(1) = \frac{1}{\frac{1}{3}\cdot 1^3 + C} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{2}{3}$$

Det gir

$$x = \frac{1}{1/3\, t^3 + 2/3} = \underline{\underline{\frac{3}{t^3+2}}}$$

b) $$\dot{x} + 2x - 4 = 0$$

Vi har en likevektstilstand når $\dot{x} = 0$:

$$\dot{x} + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = 4 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Vi bruker integrerende faktor e^{2t} for å løse likningen:

$$\dot{x}e^{2t} + 2xe^{2t} = 4e^{2t} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(xe^{2t}) = 4e^{2t}$$

$$\int \frac{d}{dt}(xe^{2t})dt = \int 4e^{2t} dt \Leftrightarrow$$

$$xe^{2t} = 2e^{2t} + C \Leftrightarrow$$

$$x = 2 + Ce^{-2t}$$

Likevektstilstanden $x = 2$ er stabil siden

$a = 2 > 0$. Vi ser at

$x \to 2$ når $t \to \infty$.

c) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$

Karakteristisk likning er

$r^2 - 4r + 4 = 0$

$$r_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$$

Det vil si at $r_1 = r_2 = 2$.

Vi har da løsningen

$$\underline{\underline{x = (A + Bt)e^{2t}}}.$$

#4

a) Vi setter opp Lagrangefunksjonen for kostnads-minimeringsproblemet:

$$\mathcal{L} = kK + lL + rR - \lambda\left((KLR)^{\frac{1}{a}} - Q\right)$$

$$\mathcal{L}_K = k - \lambda \frac{1}{a} (KLR)^{\frac{1}{a}} \frac{1}{K} = 0 \qquad (1)$$

$$\mathcal{L}_L = l - \lambda \frac{1}{a} (KLR)^{\frac{1}{a}} \frac{1}{L} = 0 \qquad (2)$$

$$\mathcal{L}_R = r - \lambda \frac{1}{a} (KLR)^{\frac{1}{a}} \frac{1}{R} = 0 \qquad (3)$$

Starter med (1):

$$k - \lambda \frac{1}{a} (LR)^{\frac{1}{a}} K^{\frac{1-a}{a}} = 0 \Leftrightarrow K^{\frac{1-a}{a}} = \frac{k}{\lambda \frac{1}{a} (LR)^{1/a}} \Rightarrow$$

$$K = \left(\frac{ka}{\lambda (LR)^{1/a}}\right)^{\frac{a}{1-a}} \qquad (4)$$

Fra (2) og (3) følger tilsvarende at

$$L = \left(\frac{la}{\lambda (KR)^{1/a}}\right)^{\frac{a}{1-a}}$$

$$R = \left(\frac{ra}{\lambda (KL)^{1/a}}\right)^{\frac{a}{1-a}}$$

$$\mathcal{L}_\lambda = -(KLR)^{\frac{1}{a}} + Q = 0 \iff KLR = Q^a$$

Dette gir

$$K = \frac{Q^a}{LR}, \quad L = \frac{Q^a}{KR}, \quad R = \frac{Q^a}{KL}$$

Vi omskriver nå (4) slik:

$$K = \left(\frac{ka}{\lambda}\right)^{\frac{a}{1-a}} (LR)^{-\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{1-a}} = \left(\frac{ka}{\lambda}\right)^{\frac{a}{1-a}} (LR)^{\frac{1}{a-1}}$$

Setter dette lik det andre uttrykket for K:

$$\frac{Q^a}{LR} = \left(\frac{ka}{\lambda}\right)^{\frac{a}{1-a}} (LR)^{\frac{1}{a-1}} \iff$$

$$Q^a = \left(\frac{ka}{\lambda}\right)^{\frac{a}{1-a}} (LR)^{\frac{1}{a-1}} \cdot (LR)^{\frac{a-1}{a-1}} = \left(\frac{ka}{\lambda LR}\right)^{\frac{a}{1-a}}$$

Tilsvarende får vi for de to andre innsatsfaktorene

$$Q^a = \left(\frac{la}{\lambda KR}\right)^{\frac{a}{1-a}} \quad \text{og} \quad Q^a = \left(\frac{ra}{\lambda KL}\right)^{\frac{a}{1-a}}$$

Nå har vi tre uttrykk for Q^a. Setter to av disse like:

$$\left(\frac{ka}{\lambda LR}\right)^{\frac{a}{1-a}} = \left(\frac{la}{\lambda KR}\right)^{\frac{a}{1-a}} \iff \left(\frac{k}{L}\right)^{\frac{a}{1-a}} = \left(\frac{l}{K}\right)^{\frac{a}{1-a}}$$

$$\iff$$

$\frac{k}{L} = \frac{l}{K} \Leftrightarrow K = \frac{l}{k} L$. Tilsvarende får vi at

$$R = \frac{l}{r} L.$$

$$KLR = Q^a \Leftrightarrow \overbrace{\frac{l}{k} L}^{K} \cdot L \cdot \overbrace{\left(\frac{l}{r} L\right)}^{R} = Q^a \Leftrightarrow$$

$$L^3 = \frac{krQ^a}{l^2} \Leftrightarrow \underline{\underline{L^* = \left(\frac{krQ^a}{l^2}\right)^{\frac{1}{3}}}}.$$

Tilsvarende får vi:

$$\underline{\underline{K^* = \left(\frac{lrQ^a}{k^2}\right)^{1/3}}} \text{ og } \underline{\underline{R^* = \left(\frac{klQ^a}{r^2}\right)^{\frac{1}{3}}}}.$$

b) $$\mathcal{L} = k\bar{K} + lL + rR - \lambda\left((\bar{K}LR)^{\frac{1}{a}} - Q\right)$$

$$\mathcal{L}_L = l - \lambda \frac{1}{a} (\bar{K}LR)^{\frac{1}{a}} \frac{1}{L} = 0$$

$$\mathcal{L}_R = r - \lambda \frac{1}{a} (\bar{K}LR)^{\frac{1}{a}} \frac{1}{R} = 0$$

Dette gir

$$L = \left(\frac{la}{\lambda(\bar{K}R)^{1/a}}\right)^{\frac{a}{1-a}} \text{ og } R = \left(\frac{ra}{\lambda(\bar{K}R)^{1/a}}\right)^{\frac{a}{1-a}}$$

Ved å sette $\mathcal{L}_\lambda = 0$ får vi

$$L = \frac{Q^a}{\bar{K}R} \quad \text{og} \quad R = \frac{Q^a}{\bar{K}L}$$

Ved å sette de to uttrykkene for L lik hverandre, får vi at

$$Q^a = \left(\frac{l a}{\lambda \bar{K} R}\right)^{\frac{a}{1-a}} . \qquad (5)$$

Tilsvarende for R:

$$Q^a = \left(\frac{r a}{\lambda \bar{K} L}\right)^{\frac{a}{1-a}} \qquad (6)$$

Sett (5) = (6):

$$\left(\frac{l a}{\lambda \bar{K} R}\right)^{\frac{a}{1-a}} = \left(\frac{r a}{\lambda \bar{K} L}\right)^{\frac{a}{1-a}} \Leftrightarrow \frac{l}{R} = \frac{r}{L} \Leftrightarrow$$

$$R = \frac{l}{r} L$$

$$\bar{K}LR = Q^a \Leftrightarrow \bar{K}\, L \frac{l}{r} L = Q^a \Leftrightarrow \underline{\underline{L^* = \left(\frac{r Q^a}{\bar{K} l}\right)^{\frac{1}{2}}}}$$

Tilsvarende får vi at

$$\underline{\underline{R^* = \left(\frac{l Q^a}{\bar{K} r}\right)^{\frac{1}{2}}}} .$$

1 $\bar{K} < \left(\frac{l r Q^a}{k^2}\right)^{1/3}$

Da er kapital en knapp faktor

og $L^* = \left(\frac{r Q^a}{\bar{K} l}\right)^{\frac{1}{2}}$ og $R^* = \left(\frac{l Q^a}{\bar{K} r}\right)^{\frac{1}{2}}$

2 $\bar{K} \geq \left(\frac{l r Q^a}{k^2}\right)^{1/3}$

Da er ikke kapital en knapp faktor og

L^* og R^* blir som i spm. a).

(Du kan selv sette inn i uttrykkene for L^* og R^* du fant i b) for

$\bar{K} = \left(\frac{l r Q^a}{k^2}\right)^{1/3}$ og se at

L^* og R^* fra spm. a) og spm. b)

blir like.)