ECONnect NTNU

Faktor

- en eksamensavis utgitt av ECONnect

Fasit:

SØK3004 – Videregående matematisk analyse

Eksamen: Høsten 2009

Antall sider: 16

Om ECONnect:

ECONnect er en frivillig studentorganisasjon for studentene på samfunnsøkonomi- og finansøkonomistudiet ved NTNU. Vi arbeider for økt faglig kompetanse blant våre studenter samt tettere kontakt med næringslivet. Det gjør vi ved å arrangere fagdager, gjesteforelesninger, bedriftspresentasjoner m.m. I dag går det ca. 200 studenter på bachelornivå (1.-3. klasse) og ca. 70 studenter på masternivå (4.-5. klasse). Studentene på masternivå er fordelt på de to linjene samfunnsøkonomi (ca. 50 stk) og finansiell økonomi (ca. 20 stk). Mer om ECONnect og aktuelle arrangementer på www.econnect-ntnu.no.

ECONnect består av følgende personer ved utgivelsestidspunkt:

Bjørn Bergholt (Leder)	bjorn@econnect-ntnu.no
Elise Caspersen (Fagdagansvarlig)	elise@econnect-ntnu.no
Pål Christian Vågbø (Bedriftansvarlig)	paal@econnect-ntnu.no
Tormod Hagerup (Økonomi/Samfunnsøk.)	tormod@econnect-ntnu.no
Tiril Toftedahl	tiril@econnect-ntnu.no
Louis Dieffenthaler	louis@econnect-ntnu.no
Tone Hedvig	tone@econnect-ntnu.no
Ole Christian Grytten	ole@econnect-ntnu.no

Post- og besøksadresse:	*Organisasjonsnummer:*	*Hjemmeside:*
ECONnect, NTNU Dragvoll Institutt for samfunnsøkonomi Bygg 7, Nivå 5 7491 Trondheim	NO 994 625 314	www.econnect-ntnu.no

Merk: Eksamensbesvarelsene har i varierende grad feil og mangler, både oppsett og innhold. De vil også kun vise en av flere mulige fremgangsmåter. ECONnect står ikke ansvarlig for selve faginnholdet.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for samfunnsøkonomi

EKSAMENSOPPGAVE I SØK3004

VIDEREGÅENDE MATEMATISK ANALYSE

Faglig kontakt under eksamen: Hildegunn E. Stokke

Tlf.: 9 16 65

Eksamensdato: Tirsdag 19. mai 2009

Eksamenssted: Dragvoll

Eksamenstid: 5 timer

Studiepoeng: 15

Tillatte hjelpemidler: Flg formelsamling: Knut Sydsæter, Arne Strøm og Peter Berck (2006): Matematisk formelsamling for økonomer, 4utg. Gyldendal akademiske. Knut Sydsæter, Arne Strøm, og Peter Berck (2005): Economists' mathematical manual, Berlin.
Enkel kalkulator Citizen SR-270x el. HP 30S.

Sensur: 12. juni 2009

Merk! Studentene må primært gjøre seg kjent med sensur på stud.web eller ved å oppsøke sensuroppslagene. Evt telefoner om sensur må rettes til instituttet. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike telefoner.

Eksamensoppgaven består av 4 oppgaver med delspørsmål som alle skal besvares. Vekting av oppgavene er gitt i parentes.

Oppgave 1 (25%)

a) Beregn følgende integral

i) $\int_0^1 \left(2x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5 \right) dx$

ii) $\int \frac{4x^3 - 5x^2 + 8x - 1}{x-2} dx$

iii) $\int \frac{8x-2}{\left(2x^2 - x + 1\right)^3} dx$

b) Finn den allmenne løsningen av differensiallikningen $-\dot{x} = 3x^2 te^{-2t}$. Finn også løsningskurven som går gjennom punktet $(t,x) = (0,4)$.

c) For hvilke verdier av a har følgende matrise en invers?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 0 & 4 \\ 15/8 & 5-2a & 3 \end{pmatrix}$$

Finn den inverse for a = 1.

Oppgave 2 (17%)

Følgende likningssystem definerer u og v som funksjoner av x og y:

$$x^2 + e^{v-u} - xy = 1$$
$$\ln y - u + 2v^2 = e$$

a) Totaldifferensier systemet.

b) Finn generelle uttrykk for de partielle deriverte $\frac{\partial v}{\partial x}$ og $\frac{\partial v}{\partial y}$.

c) Finn verdiene til de partielle deriverte $\frac{\partial u}{\partial x}$ og $\frac{\partial u}{\partial y}$ i punktet P: $(x,y,u,v) = (1,e,1,1)$.

Oppgave 3 (23%)

Betrakt systemet av differensiallikninger

$$\dot{x} = x^2 - y$$
$$\dot{y} = 4 - y$$

a) Finn *x*-isoklinen(e) og *y*-isoklinen(e) (eller nullklinene som de også kalles). Finn systemets likevekt(er).

b) Lag faseplandiagram og vis ved piler hvordan systemet beveger seg utenfor likevekt. Synes likevekten(e) å være stabil?

Oppgave 4 (35%)

En vare produseres ved hjelp av to innsatsfaktorer, v_1 og v_2. Prisen på faktorene er hhv. q_1 og q_2. Kvantum av varen er X, og produktfunksjonen er gitt ved:

$X = \left(v_1^{-\rho} + v_2^{-\rho}\right)^{-1/\rho}$ der ρ er en konstant parameter, $\rho > -1$ og $\rho \neq 0$

a) Finn kostnadsfunksjonen.

b) Finn effekten av økt pris på v_1 (dvs. økt q_1) på optimal faktorbruk (gitt at produsert kvantum holdes fast).

c) Finn substitusjonselastisiteten mellom v_1 og v_2.

Fasit eksamen SØK3004 høsten 2009.

Oppg. 1

a) i) $\int (4x^3-2x^2+5)^4(3x^2-x)\,dx$

Sett $u = 4x^3-2x^2+5$

$du = (12x^2-4x)\,dx \Rightarrow (3x^2-x)dx = \frac{1}{4}du$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{4}u^4\,du = \frac{1}{20}u^5 + C = \underline{\underline{\frac{1}{20}(4x^3-2x^2+5)^5 + C}}$$

ii) $\int \frac{3x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}}{x+1}\,dx$

Polynomdivisjon gir:

$$3x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} : (x+1) = 3x^3 - 4x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{9}{2} + \frac{6}{x+1}$$

$$\begin{array}{l}
-(3x^4+3x^3) \\
\hline
-4x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} \\
-(-4x^3-4x^2) \\
\hline
\frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{2} \\
-(\frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x) \\
\hline
-\frac{9}{2}x + \frac{3}{2} \\
-(-\frac{9}{2}x - \frac{9}{2}) \\
\hline
6
\end{array}$$

$$\Rightarrow \int \left(3x^3 - 4x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{9}{2} + \frac{6}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{3}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{2}x + 6\ln(x+1) + c$$

iii)

$$\int_0^1 \Bigg(\underbrace{\int_0^1 \left(x^{1/2} y + 2x + y^{1/2} \right) dy}_{} \Bigg) dx$$

$$\downarrow$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^{1/2} y^2 + 2xy + \frac{2}{3} y^{3/2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} x^{1/2} + 2x + \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^{1/2} + 2x + \frac{2}{3} \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} x^{3/2} + x^2 + \frac{2}{3} x \right]_0^1 = \frac{1}{3} + 1 + \frac{2}{3} = 2$$

b)

$$\int_0^5 500t\, e^{-0,04t}\, dt$$

Sett $f(t) = 500t \Rightarrow f'(t) = 500$

og $g'(t) = e^{-0,04t} \Rightarrow g(t) = -\frac{1}{0,04} e^{-0,04t}$

$$\Rightarrow \int_0^5 500t\, e^{-0,04t}\, dt = \left[-500t \cdot \frac{1}{0,04} e^{-0,04t}\right]_0^5$$

$$- \int_0^5 -500 \cdot \frac{1}{0,04} e^{-0,04t}\, dt$$

$$= \left[-12500t\, e^{-0,04t}\right]_0^5 + 12500 \int_0^5 e^{-0,04t}\, dt$$

$$= -62500\, e^{-0,2} + 12500 \left[-\frac{1}{0,04} e^{-0,04t}\right]_0^5$$

$$= -62500\, e^{-0,2} + 12500 \left(-\frac{1}{0,04} e^{-0,2} + \frac{1}{0,04}\right)$$

$$= -62500\,e^{-0,2} - 312500\,e^{-0,2} + 312500$$

$$= 5475,97 \approx \underline{\underline{5476\,w}}$$

c) i)

$$AA' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\det(AA') = 14 \cdot 10 - 25 = 115 \neq 0$$

$$(AA')^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{115}\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 14 \end{pmatrix}}}$$

ii)

$$C = \frac{1}{115}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 14 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{115}\begin{pmatrix} 15 & 4 \\ -5 & 37 \\ 30 & -15 \end{pmatrix}}}$$

$$ACb = AA'(AA')^{-1}b = Ib = b.$$

Oppg. 2

a) $$X = (L^{-2}+K^{-2})^{-\frac{1}{2}}$$

$$\varepsilon_L = \frac{\partial X}{\partial L}\cdot\frac{L}{X} = -\frac{1}{2}\left(L^{-2}+K^{-2}\right)^{-3/2}(-2)\cdot L^{-3}\cdot\frac{L}{X}$$

$$= \left(L^{-2}+K^{-2}\right)^{-3/2}\cdot L^{-2}/X$$

$$= \left(L^{-2}+K^{-2}\right)^{-1}\cdot L^{-2}$$

$$= \frac{1}{\left(L^{-2}+K^{-2}\right)L^{2}} = \frac{1}{1+\left(\frac{L}{K}\right)^2} > 0 \text{ og } < 1$$

Tilsvarende: $$\varepsilon_K = \frac{\partial X}{\partial K}\cdot\frac{K}{X} = \frac{1}{1+\left(\frac{K}{L}\right)^2} > 0 \text{ og } < 1$$

ɔ: Avtakende utbytte mhp begge faktorer.
En økning i K eller L med 1%, øker produksjonen med mindre enn 1%. Grenseelastisitetene avhenger av relativ faktorbruk.

$$\varepsilon = \varepsilon_L + \varepsilon_K = \frac{1}{1+\left(\frac{L}{K}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{K}{L}\right)^2} = \frac{1+\left(\frac{K}{L}\right)^2 + 1+\left(\frac{L}{K}\right)^2}{\left(1+\left(\frac{L}{K}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{K}{L}\right)^2\right)}$$

$$= \frac{2+\left(\frac{K}{L}\right)^2+\left(\frac{L}{K}\right)^2}{1+\left(\frac{K}{L}\right)^2+\left(\frac{L}{K}\right)^2+1} = \underline{\underline{1}}$$ Konstant utbytte mhp skala.

$$X = L^{0,4} K^{0,5}$$

$$\varepsilon_L = \frac{\partial X}{\partial L} \cdot \frac{L}{X} = \frac{0,4\, L^{-0,6} K^{0,5} \cdot L}{X} = \underline{\underline{0,4}}$$

$$\varepsilon_K = \frac{\partial X}{\partial K} \cdot \frac{K}{X} = \frac{0,5\, L^{0,4} K^{-0,5} \cdot K}{X} = \underline{\underline{0,5}}$$

ↄ: Avtakende utbytte mhp begge faktorer, men grenseelastisitetene er uavhengig av relativ faktorbruk. En økning i bruken av arbeidskraft med 1%, øker produksjonen med 0,4%.

$$\varepsilon = \varepsilon_L + \varepsilon_K = 0,9$$

ↄ: Avtakende utbytte mhp skalaen.
Dersom en øker bruken av både arbeidskraft og kapital med 1%, øker produksjonen med 0,9%.

b)

$$\sigma = El_{f_1'/f_2'}\left(\frac{K}{L}\right)$$

$$X = f(L,K) = \left(L^{-2} + K^{-2}\right)^{-1/2}$$

$$\frac{f_1'}{f_2'} = \frac{-\frac{1}{2}\left(L^{-2}+K^{-2}\right)^{-3/2}(-2)L^{-3}}{-\frac{1}{2}\left(L^{-2}+K^{-2}\right)^{-3/2}(-2)K^{-3}}$$

$$= \left(\frac{K}{L}\right)^3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{K}{L}\right) = \left(\frac{f_1'}{f_2'}\right)^{1/3} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{\sigma = \frac{1}{3}}}$$

$$X = f(L,K) = L^{0,4}K^{0,5}$$

$$\frac{f_1'}{f_2'} = \frac{0{,}4\,L^{-0,6}K^{0,5}}{0{,}5\,L^{0,4}K^{-0,5}} = \frac{0{,}4}{0{,}5}\cdot\frac{K}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{0{,}5}{0{,}4}\cdot\frac{f_1'}{f_2'} \qquad \Rightarrow \sigma = \frac{\partial\left(\frac{K}{L}\right)}{\partial\left(\frac{f_1'}{f_2'}\right)}\cdot\frac{f_1'/f_2'}{K/L} = \frac{0{,}5}{0{,}4}\cdot\frac{\frac{0{,}4}{0{,}5}\cdot\frac{K}{L}}{\frac{K}{L}}$$

$$\underline{\underline{= 1}}$$

Oppg. 3

$$2x^2y^2 + xy - 3y = 9$$

a) $x = 0 \Rightarrow -3y = 9 \Rightarrow y = -3$

$y = 0 \Rightarrow 0 = 9 \Rightarrow$ Ingen skjæring med x-aksen

Skjærer y-aksen i $(x, y) = (0, -3)$.

b) $4xy^2 + 2x^2 2yy' + y + xy' - 3y' = 0$

$$(4x^2y + x - 3)y' = -(4xy^2 + y)$$

$$\underline{\underline{y' = -\frac{4xy^2 + y}{4x^2y + x - 3}}}$$

c) Ta utg. pkt i : $4xy^2 + 4x^2yy' + y + xy' - 3y' = 0$

$\Rightarrow 4y^2 + 4x\,2yy' + (8xy + 4x^2y')y' + 4x^2yy'' + y'$

$+ y' + xy'' - 3y'' = 0$

$$\Rightarrow 4y^2 + 8xyy' + 8xyy' + 4x^2y'y' + 4x^2yy''$$

$$+ 2y' + xy'' - 3y'' = 0$$

$$\Rightarrow 4y^2 + 16xyy' + 4x^2y'y' + 4x^2yy'' + 2y'$$

$$+ xy'' - 3y'' = 0$$

$$\Rightarrow (4x^2y + x - 3)y'' = -(4y^2 + 16xyy' + 4x^2y'y' + 2y')$$

$$\Rightarrow y'' = -\frac{4y^2 + 16xyy' + 4x^2y'y' + 2y'}{4x^2y + x - 3}$$

d) I punktet $(0,-3)$: $y' = -1 < 0$: Fallende kurve

$y'' = -\frac{36-2}{-3} = \frac{34}{3} > 0$ konveks

Oppg. 4

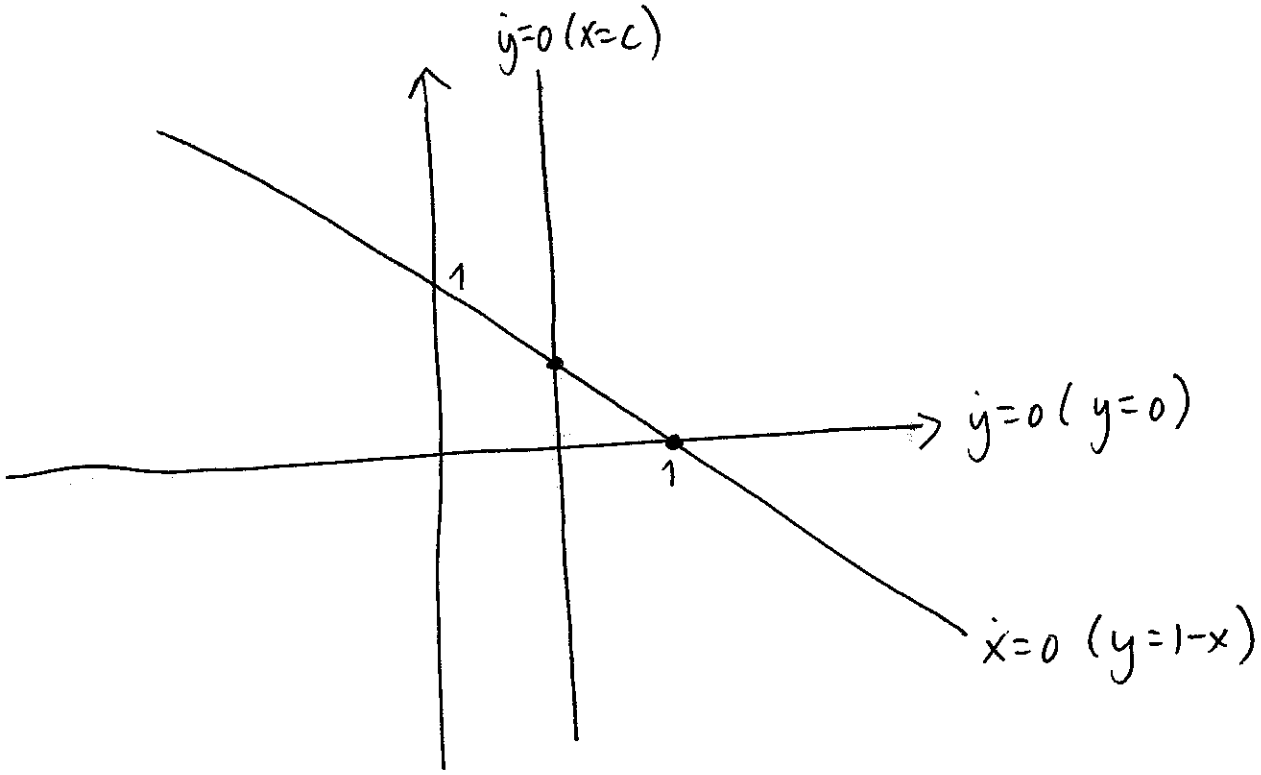
$$\dot{x} = y + x - 1$$

$$\dot{y} = xy - cy \qquad \text{der} \quad 0 < c < 1$$

a) $\dot{x} = 0 \Rightarrow y + x - 1 = 0 \Rightarrow \underline{y = 1 - x}$

$\dot{y} = 0 \Rightarrow xy - cy = 0 \Rightarrow y(x - c) = 0$

$\Rightarrow \underline{y = 0} \quad \vee \quad \underline{x = c}$

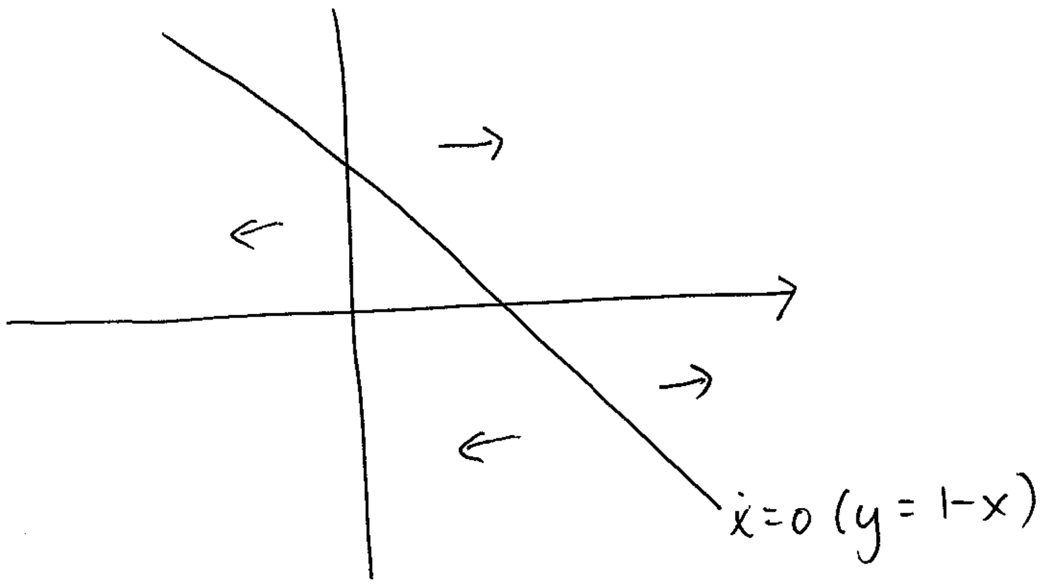


To likevekter: $(x, y) = (1, 0)$

$(x, y) = (c, 1 - c)$

b) x-dynamikk

$\dot{x} = y + x - 1$

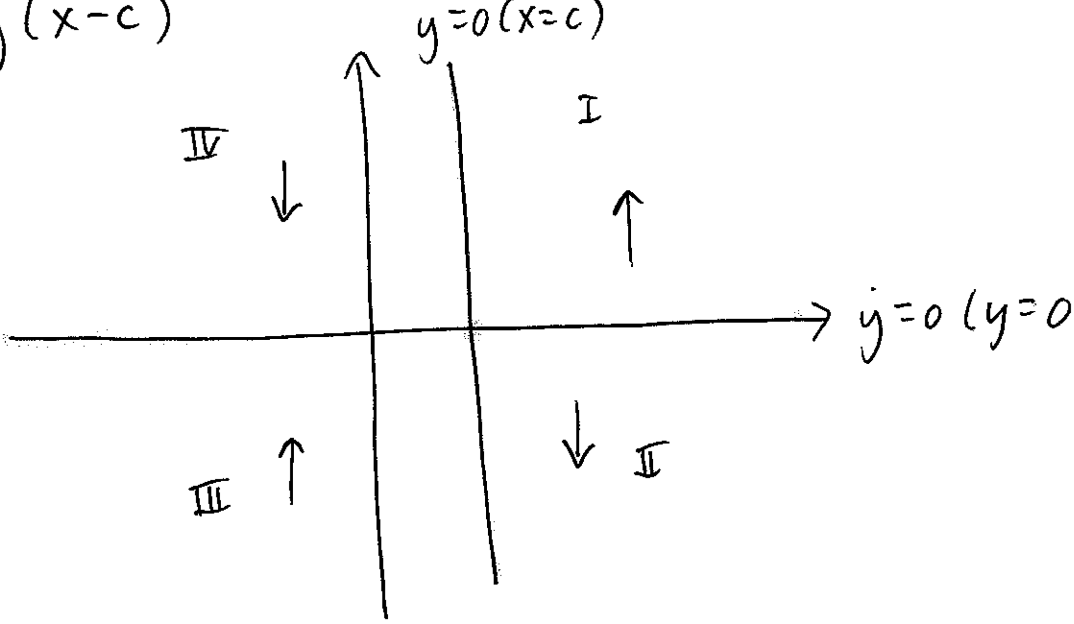


Over kurva: $y > 1-x \Rightarrow y + x - 1 > 0 \Rightarrow \dot{x} > 0$

Under kurva: $y < 1-x \Rightarrow y + x - 1 < 0 \Rightarrow \dot{x} < 0$

y-dynamikk

$\dot{y} = y(x-c)$



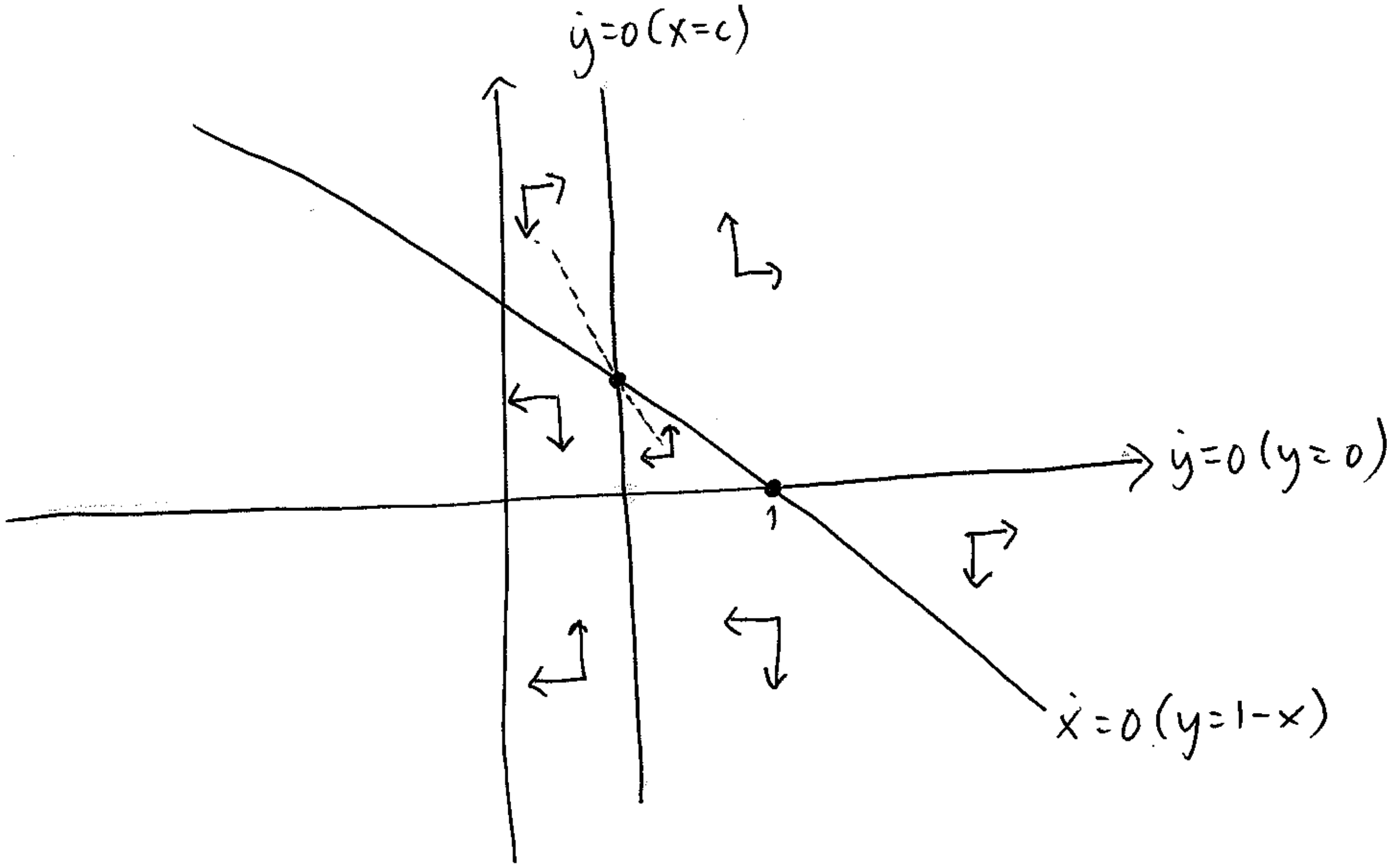
I : $x > c$ og $y > 0 \Rightarrow \dot{y} > 0$

II : $x > c$ og $y < 0 \Rightarrow \dot{y} < 0$

III : $x < c$ og $y < 0 \Rightarrow \dot{y} > 0$

IV : $x < c$ og $y > 0 \Rightarrow \dot{y} < 0$

Samlet dynamikk



$(x, y) = (c, 1-c)$: Sadelbane

$(x, y) = (1, 0)$: Ustabil, kan kun nåes om en starter i punktet.

Oppg. 5

$$\text{Max } f(x,y) = x^2 + y^2$$

gitt at $5x^2 + 6xy + 5y^2 \leq 1$

$$\mathcal{L} = x^2 + y^2 - \lambda(5x^2 + 6xy + 5y^2 - 1)$$

FOBs:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x - \lambda(10x + 6y) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2x}{10x+6y} = \frac{x}{5x+3y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2y - \lambda(6x + 10y) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2y}{6x+10y} = \frac{y}{3x+5y} \qquad (2)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (\lambda = 0 \text{ hvis } 5x^2 + 6xy + 5y^2 < 1) \qquad (3)$$

Tilfelle 1: $5x^2+6xy+5y^2=1$ og $\lambda \geq 0$

(1) og (2) gir:

$$\frac{x}{5x+3y} = \frac{y}{3x+5y}$$

$$x(3x+5y) = y(5x+3y)$$

$$3x^2+5xy = 5xy+3y^2$$

$$3x^2 = 3y^2$$

$$x^2 = y^2$$

$\underline{x = \pm y}$ inn i bibet.

i) $\underline{x=y}$

$$5x^2+6x^2+5x^2=1$$

$$16x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \underline{x = \pm \frac{1}{4}} \Rightarrow \underline{y = \pm \frac{1}{4}}$$

$\Rightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ og $(x,y) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

Må sjekke at $\lambda \geq 0$:

$(x,y) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$: $\lambda = \frac{x}{5x+3y} = \frac{1/4}{5\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4}} > 0$

$(x,y) = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$: $\lambda = \frac{-1/4}{-5/4 - 3/4} > 0$

ii) $\underline{x = -y}$

$$5x^2 - 6x^2 + 5x^2 = 1$$

$$4x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\underline{x = \pm \frac{1}{2}} \Rightarrow \underline{y = \pm \frac{1}{2}}$$

$(x,y) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ og $(x,y) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Må sjekke at $\lambda \geq 0$:

$(x,y) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$: $\lambda = \frac{x}{5x+3y} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}} > 0$

$(x,y) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$: $\lambda = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{5}{2} + \frac{3}{2}} > 0$

Tilfelle 2: $\lambda = 0$ og $5x^2 + 6xy + 5y^2 < 1$

Tre likn og tre ukjente:

$$\lambda = \frac{x}{5x+3y} \qquad (1)$$

$$\lambda = \frac{y}{3x+5y} \qquad (2)$$

$$\lambda = 0 \qquad (3)$$

(3) inn i (1) og (2) gir $x = 0$ og $y = 0$.

Må sjekke at bibet. er oppfylt:

$(x,y) = (0,0)$ gir $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 0 < 1$. ok.

Dvs: Vi har totalt fem mulige løsningskandidater:

$(x,y) = (1/4, 1/4) \Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$

$(x,y) = (-1/4, -1/4) \Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$

$(x,y) = (1/2, -1/2) \Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$(x,y) = (-1/2, 1/2) \Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Optimal løsning, siden det gir høyest funksjonsverdi.

$(x,y) = (0,0) \Rightarrow f(x,y) = 0$