Søk 3004 V19

1

a) $\int (ax^2 + bx + h)\,dx = \underline{\underline{\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + hx + C}}$

b) $\int_s^t (ax+b)\,dx = \left[\frac{a}{2}x^2 + bx + C\right]_s^t = \frac{a}{2}t^2 + bt - \frac{a}{2}s^2 - bs$

$= \underline{\underline{\frac{a}{2}(t^2 - s^2) + b(t-s)}}$

c) $\frac{d}{dt}\int_s^t (ax+b)\,dx = \underline{\underline{at+b}}$

d) $\frac{d}{dt}\left(\frac{a}{2}(t^2-s^2) + b(t-s)\right) = 2\cdot\frac{a}{2}t + b$

$= \underline{\underline{at+b}}$

e) $\int x^5\sqrt{x^3+1}\,dx = \int \underbrace{x^3}_{f}\underbrace{\left(x^2\sqrt{x^3+1}\right)}_{g'}dx$

Bruker delvis integrasjon. Må først finne g. Bruker substitusjon:

$\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$. Sett $u = x^3+1$. $\frac{du}{dx} = 3x^2 \Leftrightarrow$

$$dx = \frac{du}{3x^2}.$$

$$\int \frac{1}{3} u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{2}{9} u^{\frac{3}{2}} + C_1$$

$$= \underline{\frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2} + C_1}$$

Da får vi:

$$\int x^3\left(x^2\sqrt{x^3+1}\right)dx = \underbrace{x^3}_{f}\underbrace{\frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2}}_{g} - \int \underbrace{3x^2}_{f'}\cdot\underbrace{\frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2}}_{g'}\,dx$$

Bruker substitusjonsmetoden på integralet.

Sett $u = x^3+1$, $dx = \frac{du}{3x^2}$:

$$\int 3x^2\,\frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2}\,dx = \int \frac{2}{9} u^{3/2}\,du = \frac{4}{45} u^{5/2} + C_2$$

$$= \frac{4}{45}(x^3+1)^{5/2} + C_2.$$

Dette gir at

$$\int x^5\sqrt{x^3+1}\,dx = \underline{\underline{\frac{2}{9}x^3(x^3+1)^{3/2} - \frac{4}{45}(x^3+1)^{5/2} + C}}$$

2

$$y_{T\times 1} = X_{T\times k}\, b_{k\times 1} + \varepsilon_{T\times 1}$$

a) $\varepsilon'_{1\times T}\,\varepsilon_{T\times 1}$. Da må produktet $\varepsilon'\varepsilon$ være en skalar (dimensjon 1×1).

T

1

b)
$$\varepsilon = y - Xb$$
$$\varepsilon' = y' - (Xb)' = y' - b'X'$$
$$\varepsilon'\varepsilon = (y' - b'X')(y - Xb)$$
$$= y'y - y'Xb - b'X'y + b'X'Xb \quad (*)$$

For en skalar a har vi at $a' = a$.
Siden $y'Xb$ er en skalar, må $(y'Xb)' = y'Xb$.

$(y'Xb)' = (Xb)'y = b'X'y$. Innsatt i $(*)$ får vi at

$$\varepsilon'\varepsilon = y'y - 2b'X'y + b'X'Xb.$$

c) Vi kan skrive $\varepsilon'\varepsilon$ slik:

$$\varepsilon'\varepsilon = y'y - 2\sum_{i=1}^{k} b_i x_i' y + \sum_{i=1}^{k} b_i^2 x_i' x_i ,$$

hvor b_i er element nummer i i vektoren b og x_i er kollonne i i matrisen X og har dimensjon $T \times 1$.

Minimering av $\varepsilon'\varepsilon$ mhp b_j, $j = \{1, 2, \ldots, k\}$ gir FOC:

$$\frac{\partial \varepsilon'\varepsilon}{\partial b_j} = -2 \underbrace{\underset{1\times T}{x_j'} \underset{T\times 1}{y}}_{1\times 1} + 2 \underbrace{\underset{1\times 1}{b_j} \underset{1\times T}{x_j'} \underset{T\times 1}{x_j}}_{1\times 1} = \underset{1\times 1}{0}, \; j = \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Vi samler så alle k deriverte i én vektor. Det gir

$$-2 \underbrace{\underset{k\times T}{X'} \underset{T\times 1}{y}}_{k\times 1} + 2 \underbrace{\underset{k\times T}{X'} \underset{T\times k}{X} \underset{k\times 1}{b}}_{k\times 1} = \underbrace{0}_{k\times 1}$$

Anta at $(X'X)^{-1}$ eksisterer. Da får vi at

$$X'Xb = X'y \Leftrightarrow \underline{\underline{b = (X'X)^{-1} X'y}}$$

(3)

a) $$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$$

Karakteristisk likning er

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

Det gir

$$r = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = -2, -1.$$

Da får vi den generelle løsningen

$$x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t}.$$

b) Vi har at $a = 3 > 0$ og $b = 2 > 0$. Da er løsningen GAS (se note 1 s 237 i SH SS).

Vi ser fra løsningen i a) at

$$\lim_{t \to \infty} x = 0.$$

c) $$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 3t + 2 \qquad (1)$$

Vi gjetter på at $\varphi^*(t) = At + B$.

$$\dot{\varphi}^*(t) = A, \quad \ddot{\varphi}^*(t) = 0.$$

Innsatt i (1) får vi

$$0 + 3A + 2(At + B) = 3t + 2 \Leftrightarrow$$

$$2At + (3A + 2B) = 3t + 2 \Rightarrow A = \frac{3}{2}$$

$$\left(3 \cdot \frac{3}{2} + 2B\right) = 2 \Leftrightarrow B = -\frac{5}{4}$$

$$\therefore \ \varphi^*(t) = \frac{3}{2}t - \frac{5}{4}$$

(4)

a) Vi har at

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = f^{(4)}(x) = e^x.$$

Tar en 4. ordens tilnærming rundt punktet $a=0$:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6} f'''(x-a)^3 + \frac{1}{24} f^{(4)}(x-a)^4$$

$$f(1) \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} =$$

$$2 + \frac{12}{24} + \frac{4}{24} + \frac{1}{24} = 2 + \frac{17}{24} = \underline{\underline{2{,}7083\ldots}}$$

b) $f(t) = e^{-rt}$. Tilnærm rundt tidspunktet $a=0$:

$$f(t) \approx e^{-r \cdot 0} + (-r e^{-r \cdot 0})(t-0)$$

$$= \underline{\underline{1 - rt}}$$

c) $f(t)$ viser nåverdien av å motta en krone på tid $t>0$. Siden pengene alternativt kan plasseres i banken til en rente $r>0$, så er $f(t) < 1$.

Approksimasjonen viser at det gjøres et fratrekk for ~~at~~ renten r. Hvor mye renter som må trekkes i fra, avhenger av hvor lenge det er til pengene mottas (t).

Tilnærmingen tar ikke hensyn til renters-rente-effekten.

d) $R_T = \ln\left(\frac{P_T}{P_0}\right)$

Sett $R_T(x) = \ln\left(\frac{x}{P_0}\right)$. En 1. ordens tilnærming rundt $x = P_0$ gir

$$R_T \approx \ln\left(\frac{P_0}{P_0}\right) + \frac{1}{\frac{P_0}{P_0}}\left(\frac{x}{P_0} - \frac{P_0}{P_0}\right)$$

$$= \frac{x - P_0}{P_0}$$

For $x = P_T$:

$$R_T = \frac{P_T - P_0}{P_0}.$$