#1

a) $V_0 = \int_0^\infty e^{-ks} \delta \, ds = \lim_{a \to \infty} \int_0^a e^{-ks} \delta \, ds$

$= \lim_{a \to \infty} \delta \left[-\frac{1}{k} e^{-ks} + c \right]_0^a = \underline{\underline{\frac{\delta}{k}}}$

b) $V_0 = \int_0^\infty e^{-ks} \delta e^{gs} \, ds = \lim_{a \to \infty} \int_0^a e^{-ks} \delta e^{gs} \, ds$

$= \lim_{a \to \infty} \int_0^a e^{-\varphi s} \delta \, ds,$

hvor $\varphi = k - g$.

Da ser vi fra a) at

$V_0 = \frac{\delta}{\varphi} = \underline{\underline{\frac{\delta}{k-g}}}$. (Dette er kjent som Gordons formel.)

c) $V_0 = \int_0^\infty e^{-ks} \delta s \, ds = \lim_{a \to \infty} \int_0^a e^{-ks} \delta s \, ds$

Delvis integrasjon sier at

$\int f(x) g'(x) \, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) \, dx.$

Vi bruker her delvis integrasjon på

$\int e^{-ks} s \, ds$ og setter $f = s$ og $g' = e^{-ks}$:

$$\int e^{-ks} s\,ds = -\frac{1}{k}e^{-ks}s - \int -\frac{1}{k}e^{-ks}\cdot 1\,ds$$

$$= -\frac{1}{k}e^{-ks}s - \frac{1}{k^2}e^{-ks} + C.$$

$$V_0 = \lim_{a\to\infty} \delta\left[-\frac{1}{k}e^{-ks}s - \frac{1}{k^2}e^{-ks} + C\right]_0^a$$

$$= \lim_{a\to\infty} \delta\left(-\frac{1}{k}e^{-ka}a - \frac{1}{k^2}e^{-ka} - \left(-\frac{1}{k}e^{-k\cdot 0}\cdot 0 - \frac{1}{k^2}e^{-k\cdot 0}\right)\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\delta}{k^2}}}$$

d) $V_0 = \int_0^\infty e^{-ks}\delta e^{gs}s\,ds = \int_0^\infty e^{-\varphi s}\delta s\,ds.$

Her kan vi erstatte diskonteringsrenten fra c) med φ og bruke resultatet:

$$V_0 = \frac{\delta}{\varphi^2} = \underline{\underline{\frac{\delta}{(k-g)^2}}}.$$

#2

a)
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$$
$$3x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 6$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \overbrace{\begin{matrix}2 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -2\\ 3 & 3 & 8\end{matrix}}^{A} & \begin{matrix}4\\2\\6\end{matrix}\end{array}\right]}_{A_b} \begin{matrix}\\ ]-2 \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & -2 & 2\\ -1 & -1 & 2 & -2\end{array}\right] \begin{matrix}\\ ]+1 \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \begin{matrix} \div 2 \\ ]-1 \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3/2 & 2\\ 0 & 0 & -7/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \begin{matrix}]-3/2 \\ \div -7/2 \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \quad (*)$$

Vi ser at x_2 kan velges fritt. Sett $x_2 = s$.
Løsningen blir da:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 2-s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Vi ser fra (*) at $r(A) = 2$ og $r(A_b) = 2$.

c) Vi ser at $r(A) = r(A_b) = 2 \Leftrightarrow$ systemet har løsning(er).

Systemet har $n = 3$ ukjente. Vi ser at $r(A) = r(A_b) = 2 < n = 3$. Da har systemet $3-2=1$ frihetsgrad. Én av variablene kan velges fritt (her har jeg satt $x_2 = s$).

d)

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\
x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\
3x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&2&3&4\\1&1&-2&2\\3&3&8&0\end{array}\right]{\scriptstyle -2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}2&2&3&4\\1&1&-2&2\\-1&-1&2&-8\end{array}\right]{\scriptstyle +1} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}2&2&3&4\\1&1&-2&2\\0&0&0&-6\end{array}\right]{\scriptstyle \div 2}\;{\scriptstyle -1} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&3/2&2\\0&0&-7/2&0\\0&0&0&-6\end{array}\right]{\scriptstyle \div -7/2}\;{\scriptstyle -3/2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&-6\end{array}\right] \quad **$$

Av siste rad ser vi at systemet ikke har løsning.

e) Fra ** ser vi at $\underline{\underline{r(A) = 2}} < \underline{\underline{r(A_b) = 3}}$.

f) I d) fant vi at systemet ikke har løsning ($0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -6$ er ikke mulig). Fra e) ser vi at $r(A) < r(A_b)$ og da har systemet ingen løsning. En løsning $\bar{x}$ er en lineær kombinasjon av kolonnevektorene i A som er lik $b = \begin{bmatrix}4\\2\\0\end{bmatrix}$. Her vil vektoren b ikke ligge i kolonnerommet til matrisen A. Og da har vi ikke noen løsning.

systemet

#3

$$\ddot{x} - \dot{x} - 6x = 0$$

a) Den karakteristiske likningen er

$$r^2 - r - 6 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} = \underline{-2;3}$$

Den generelle løsningen er

$$\underline{\underline{x = Ae^{-2t} + Be^{3t}.}}$$

b) Høyresiden er 2. gradspolynomet $t^2 - 3$.
Vi setter derfor $u^* = At^2 + Bt + C$.
$\dot{u}^* = 2At + B$, $\ddot{u}^* = 2A$. Setter inn i venstresiden og får

$$2A - (2At + B) - 6(At^2 + Bt + C)$$

$$= -6At^2 + (-2A - 6B)t + (2A - B - 6C)$$

12

Koeffisientene i høyresiden er 1, 0, −3. Vi får følgende likningssystem:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/18 \\ 0 & 0 & 1 & 47/108 \end{array}\right]$$

Vi får da løsningen

$$u^* = -\frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{18}t + \frac{47}{108}$$

#4

For fabrikk A: $y = x_1^a x_2^{1-a}$.

$$C_A(y) = w_1 x_1 + w_2 x_2.$$

For kostnadsminimeringsproblemet er Lagrangefunksjonen

$$\mathcal{L} = w_1 x_1 + w_2 x_2 - \lambda(x_1^a x_2^{1-a} - y)$$

$$\mathcal{L}_{x_1} = w_1 - \lambda a x_1^{a-1} x_2^{1-a} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{w_1}{a}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{a-1}$$

$$\mathcal{L}_{x_2} = w_2 - \lambda(1-a) x_1^a x_2^{-a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$w_2 - \frac{w_1}{a}(1-a)\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{a-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$w_2 - w_1 \frac{(1-a)}{a}\frac{x_1}{x_2} = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{w_1}{w_2}\frac{(1-a)}{a} x_1$$

$$\mathcal{L}_\lambda = -x_1^a x_2^{1-a} + y = 0 \Leftrightarrow$$

$$-x_1^a\left(\frac{w_1}{w_2}\frac{(1-a)}{a} x_1\right)^{1-a} + y = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \underbrace{\left(\frac{w_1}{w_2}\frac{(1-a)}{a}\right)^{a-1}}_{A_1} y \Leftrightarrow$$

$$x_1 = A_1 y$$

$$x_2 = \frac{w_1}{w_2}\frac{(1-a)}{a}\left(\frac{w_1}{w_2}\frac{(1-a)}{a}\right)^{a-1} y = \underbrace{\left(\frac{w_1}{w_2}\frac{(1-a)}{a}\right)^a}_{A_2} y$$

Kostnadsfunksjonen for fabrikk A blir da

$$C_A(y) = w_1 A_1 y + w_2 A_2 y = (w_1 A_1 + w_2 A_2) y \equiv A y.$$

Tilsvarende for fabrikk B:

$$C_B(y) = B y.$$

Både A og B er (positive) konstanter. Bedriftens kostnadsfunksjon blir dermed

$$C(y) = \min(Ay, By) = \underline{\underline{\min(A, B) y}}$$

(Dette er oppg 4.4 fra Varian og har vært gitt på øving.)