ECONnect NTNU

Faktor

- en eksamensavis utgitt av ECONnect

Eksamensbesvarelse:
SØK3005 – Informasjon og markedsteori

Eksamen:	Vår 2011
Antall sider:	30

Om ECONnect:

ECONnect er en frivillig studentorganisasjon for studentene på samfunnsøkonomi- og finansøkonomistudiet ved NTNU. Vi arbeider for økt faglig kompetanse blant våre studenter samt tettere kontakt med næringslivet. Det gjør vi ved å arrangere fagdager, gjesteforelesninger, bedriftspresentasjoner m.m. I dag går det ca. 200 studenter på bachelornivå (1.-3. klasse) og ca. 70 studenter på masternivå (4.-5. klasse). Studentene på masternivå er fordelt på de to linjene samfunnsøkonomi (ca. 50 stk) og finansiell økonomi (ca. 20 stk). Mer om ECONnect og aktuelle arrangementer på www.econnect-ntnu.no.

ECONnect består av følgende personer ved utgivelsestidspunkt:

Ole Christian Grytten(Leder)	ole@econnect-ntnu.no
Mariell Toven(Økonomiansvarlig/kandidattreffet)	mariell@econnect-ntnu.no
Daniel Johansson (Bedriftsansvarlig)	daniel@econnect-ntnu.no
Johan Berg Fossen(Fagdagsansvarlig)	johan@econnect-ntnu.no
Georg Næsheim	georg@econnect-ntnu.no
Ellen Normann	ellen@econnect-ntnu.no
Ragnhild Grøv	ragnhild@econnect-ntnu.no
Martine Ødegård(Faktoransvarlig)	martine@econnect-ntnu.no
Inga Friis	inga@econnect-ntnu.no
Caroline Lesiewicz	caroline@econnect-ntnu.no

Post- og besøksadresse:	*Organisasjonsnummer:*	*Hjemmeside:*
ECONnect, NTNU Dragvoll Institutt for samfunnsøkonomi Bygg 7, Nivå 5 7491 Trondheim	NO 994 625 314	www.econnect-ntnu.no

Merk: Eksamensbesvarelsene har i varierende grad feil og mangler, både oppsett og innhold. De vil også kun vise en av flere mulige fremgangsmåter. ECONnect står ikke ansvarlig for selve faginnholdet.

Kommentarar til k-10014, SØK3005 V-2011

Kandidaten brukar noko meir energi på generell diskusjon av Moral Hazard enn det som strengt tatt er naudsynt gjeve oppgåveformuleringa i oppgåve 2, men diskusjonen er god og relevant så dette trekk ikkje ned.

I oppgåve 2b) bommar kandidaten noko på tala, men er på riktig spor og treff den korrekte konklusjonen. Denne oppgåva var nok litt mannevond og kandidatar som kom så nærme som dette vart derfor gjevne god utteljing.

Oppgåve 2c) er ikkje veldig overbevisande besvart, men er heller ikkje direkte feil. At agenten har forhandlingskraft analyserast enklast ved å anta ei auke i reservasjonsnytta.

Ellers svarar kandidaten på ein god måte på dei øvrige oppgåvene og vanskegrada på 2b) gjev at feilreikninga i denne ikkje er tilstrekkjeleg til å trekkje karakteren ned frå **A**.

Arnt Ove Hopland
Faglærar og sensor

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for samfunnsøkonomi

EKSAMENSOPPGAVE I SØK3005
INFORMASJON OG MARKEDSTEORI

Faglig kontakt under eksamen: Arnt Ove Hopland
Tlf.: 91935

Eksamensdato: Tirsdag 31. mai 2011
Eksamenssted: Dragvoll
Eksamenstid: 4 timer
Studiepoeng: 7,5
Tillatte hjelpemidler: Flg formelsamling: Knut Sydsæter, Arne Strøm og Peter Berck (2006): Matematisk formelsamling for økonomer, 4utg. Gyldendal akademiske. Knut Sydsæter, Arne Strøm, og Peter Berck (2005): Economists' mathematical manual, Berlin.
Enkel kalkulator Citizen SR-270x el. HP 30S.
Sensur: 23. juni 2011

Oppgaveteksten er skrevet på bokmål, nynorsk og engelsk.

Eksamensoppgaven består av to oppgaver med delspørsmål som alle skal besvares. Vekting er gitt i parantes.

Oppgave 1 (50 %)

Betrakt et Cournot-oligopol med n bedrifter.

a) Finn Nash-likevekten i et en-periode spill med komplett informasjon.

b) Anta videre at $n = 2$. Bedrift 1s kostnadsfunksjon er allmenn kjent og gitt ved $c_1(q_1) = q_1 c_1$. Bedrift 2 har høye kostnader $\left(c_2(q_2) = c_2^H q_2\right)$ med sannsynlighet θ eller lave kostnader $\left(c_2(q_2) = c_2^L q_2\right)$ med sannsynlighet $1-\theta$. Bedrift 1 kan ikke observere Bedrift 2s kostnad, men kjenner sannsynligheten θ. Løs en-periode spillet.

c) Diskuter kort hvordan utfallene i b) vil variere ved endringer i sannsynligheten θ og Bedrift 1s kostnad pr produserte enhet, c_1.

Oppgave 2 (50 %)

Betrakt et samspill mellom en prinsipal og en agent der de to utfallene 50 000 og 25 000 er mulige. Hvilket utfall man oppnår avhenger av agentens innsats i tillegg til tilfeldigheter.

Agenten må velge mellom tre innsatsnivåer. Sannsynligheten for hvert av utfallene, gitt agentens innsats, er presentert i tabellen:

	Utfall (x)	
Innsatsnivå	25 000	50 000
e_1	0.25	0.75
e_2	0.50	0.50
e_3	0.75	0.25

Anta at prinsipalen er risikonøytral og at agenten er risikoavers slik at nytten kan formuleres som:

$$\text{Prinsipal}: B(x,w) = x - w$$

$$\text{Agent}: u(w,e) = \sqrt{w} - v(e), \quad \text{der } v(e_1) = 40,\ v(e_2) = 20,\ v(e_3) = 5$$

Agentens reservasjonsnytte er gitt som $\bar{u} = 120$.

a) Utled de optimale kontraktene under symmetrisk informasjon (prinsipalen kan observere agentens innsats). Hvilket innsatsnivå vil prinsipalen foretrekke?

b) Finn den optimale kontrakten under asymmmetrisk informasjon (moral hazard, prinsipalen kan ikke observere agentens innsats). Hvilket innsatsnivå ønsker prinsipalen i dette tilfellet og hvordan påvirker moral hazard kontrakter og utfall?

c) Drøft kort hvordan samspillet mellom prinsipalen og agenten hadde blitt påvirket dersom agenten hadde hatt forhandlingskraft. (Hint: ekvivalent med å endre reservasjonsnytten).

Nynorsk

Eksamensoppgåva består av to oppgåver med delspørsmål som alle skal besvarast. Vekting er gjeve i parantes.

Oppgåve 1 (50 %)

Betrakt eit Cournot-oligopol med n bedrifter.

a) Finn Nash-likevekta i eit ein-periode spel med komplett informasjon.

b) Anta vidare at $n = 2$. Bedrift 1s kostnadsfunksjon er allmenn kjend og gjeve ved $c_1(q_1) = q_1 c_1$. Bedrift 2 har høge kostnader $\left(c_2(q_2) = c_2^H q_2\right)$ med sannsyn θ og lave kostnader $\left(c_2(q_2) = c_2^L q_2\right)$ med sannsyn $1-\theta$. Bedrift 1 kan ikkje observere Bedrift 2s kostnad, men kjenner sannsynet θ. Løys ein-periode spelet.

c) Diskuter kort korleis utfalla i b) vil variere ved endringar i sannsynet θ og Bedrift 1s kostnad pr produserte eining, c_1.

Oppgåve 2 (50 %)

Betrakt eit samspel mellom ein prinsipal og ein agent der dei to utfalla 50 000 og 25 000 er moglege. Kva for eit utfall ein oppnår avheng av agentens innsats i tillegg til tilfeldigheiter. Agenten må velgje mellom tre innsatsnivå. Sannsynet for kvart av utfalla, gjeve agentens innsats, er presentert i tabellen:

	Utfall (x)	
Innsatsnivå	25 000	50 000
e_1	0.25	0.75
e_2	0.50	0.50
e_3	0.75	0.25

Anta at prinsipalen er risikonøytral og at agenten er risikoavers slik at nytta kan formulerast som:

$$\text{Prinsipal}: B(x,w) = x - w$$

$$\text{Agent}: u(w,e) = \sqrt{w} - v(e), \quad \text{der } v(e_1) = 40,\ v(e_2) = 20,\ v(e_3) = 5$$

Agentens reservasjonsnytte er gjeve som $\bar{u} = 120$.

a) Utled dei optimale kontraktene under symmetrisk informasjon (prinsipalen kan observere agentens innsats). Kva for eit innsatsnivå vil prinsipalen føretrekkje?

b) Finn den optimale kontrakta under asymmmetrisk informasjon (moral hazard, prinsipalen kan ikkje observere agentens innsats). Kva for eit innsatsnivå ønskjer prinsipalen i dette tilfellet og korleis påverker moral hazard kontrakter og utfall?

c) Drøft kort korleis samspelet mellom prinsipalen og agenten hadde blitt påverka dersom agenten hadde hatt forhandlingskraft. (Hint: ekvivalent med å endre reservasjonsnytta).

English

The exam consists of two questions with sub-questions which are all to be answered. Weights are given in parentheses.

Problem 1 (50 %)

Consider a Cournot oligopoly with n firms.
a) Find the one-period Nash equilibrium in the case of complete information.

b) Now assume that $n=2$. Firm 1's cost function is common knowledge and given as $c_1(q_1)=q_1c_1$. Firm 2 has high costs $\left(c_2(q_2)=c_2^H q_2\right)$ with probability θ or low costs $\left(c_2(q_2)=c_2^L q_2\right)$ with probability $1-\theta$. Firm 1 does not know Firm 2's costs, but do know the probability θ. Solve the one-period game.

c) Discuss briefly how the outcomes in b) will vary with changes in the probability θ and Firm 1's cost per unit, c_1.

Problem 2 (50 %)

Consider a relationship between a principal and an agent in which the two outcomes 50,000 and 25,000 are possible. The agent must choose between three level of efforts. The probability for each outcome, given the agent's effort, is presented in the table:

	Outcome (x)	
Effort	25 000	50 000
e_1	0.25	0.75
e_2	0.50	0.50
e_3	0.75	0.25

Assume that the principal is risk-neutral while the agent is risk-averse. The utilities may be written:

$$\text{Principal}: B(x,w)=x-w$$

$$\text{Agent}: u(w,e)=\sqrt{w}-v(e), \quad \text{der } v(e_1)=40,\ v(e_2)=20,\ v(e_3)=5$$

The agent's reservation utility is given as $\bar{u}=120$.

a) Find the optimal contracts given symmetrical information (the principal can observe the agent's effort). What effort level will the principal prefer?

b) Find the optimal contract given asymmetrical information (moral hazard, the principal can not observe the agent's effort). What effort level does the principal prefer in this case, and how does moral hazard affect the outcomes and contracts?

c) How would granting the agent bargaining power affect the contracts and outcomes? (Hint: Equivalent with changing the reservation utility).

Oppgave 1.

Cournot - oligopol men n bedrifter.

a) Antakelser

- homogene varer
- en - periode spill
- spillerne handler simultant
- komplett info ; kjenner hverandres payoffunksjoner
- $P(Q) = a - Q$, $P(Q) = 0$ for $Q > a$
- $Q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$
- $C_i(q_i) = c \cdot q_i$ (faste marginale kostnader)
- profittmaksimerende bedrifter
- profitten gis av :

$$\pi_i(q_i) = P(Q) \cdot q_i - c q_i$$

- like bedrifter

En Nash-likevekt gis av den/de tilpasningene der bedrift i's valg (q_i) er beste respons, gitt alle de andres valg.

$$u(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) >$$

$$u(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*).$$

I et cournot-spill finner vi denne ved å maksimere alle spillernes profitt.

Spiller i:

$$\max_{q_i} \pi_i(q_i) = P(q)q_i - cq_i$$

$$= [a - [q_1 + q_2 + \ldots + q_n] - c]q_i$$

$$= [a - [q_1 + \ldots + q_{i-1} + q_{i+1} + \ldots + q_n] - c - q_i]q_i$$

Setter: $q_1 + \ldots + q_{i-1} + q_{i+1} + \ldots + q_n = q_j(n-1)$

FOB. finner vi nå fra

$$\max_{q_i} \pi_i(q_i) = [a - q(n-1) - c - q_i]q_i$$

FOB.

$$q_i: \quad a - q(n-1) - c - 2q_i = 0$$

$$2q_i = a - q(n-1) - c$$

$$q_i = \frac{a - (q(n-1)) - c}{2}$$

Tilsvarende kan vi løse for alle n-bedrifter (da de er like), og finner beste responsfunksjonen til alle n-bedrifter, ~~gitt~~ til de andre spillernes tilpasning. Vi deriver:

$$R_i(q_i) = \frac{a - q(n-1) - c}{2}$$

Tilsvarende for alle q_i.

Løser for q_i fra $R_i(q_i)$:

$$2q_i = a - q_i n + q_i - c$$

$$2q_i + q_i n - q_i = a - c$$

$$q_i + q_i n = a - c$$

$$q_i(1+n) = a - c$$

$$\underline{\underline{q_i = \frac{a-c}{(1+n)}}}$$

Dette er den generelle tilpasningen i et Cournot-spill med n-bedrifter, og gir NE for $\forall i$. Siden alle bedrifter antas å være like, vil alle produsere q_i.

Profitten:

$$\pi_i(q_i) = P(Q)q_i - cq_i$$
$$= [a - nq_i - c] \cdot q_i$$
$$= [a - c - nq_i]q_i$$
$$= \left[a - c - n\left(\frac{a-c}{1+n}\right)\right]\left(\frac{a-c}{1+n}\right)$$
$$= \left[\frac{(a-c) + \cancel{(n(a-c))} - \cancel{n(a-c)}}{(1+n)}\right] \cdot \left(\frac{a-c}{1+n}\right)$$
$$\underline{\underline{= \left(\frac{a-c}{1+n}\right)^2 = (q_i)^2}}$$

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

b) $n = 2$, asymmetrisk info.

Har nå at

- $C_1(q_1) = q_1 c_1$ er allment kjent
- $C_2(q_2) = \begin{cases} C_2(q_2) = c_2^H q_2 & \text{med sanns. } \theta \\ C_2(q_2) = c_2^L q_2 & \text{med sanns. } (1-\theta) \end{cases}$
- bedrift 1 kjenner kun θ.

- Har nå at bedrift 2 har full info, mens bedrift 1 kun kjenner egen info og sanns. for bedrift 2s kostnader.
- Løser på samme måte som i a), men har nå kun to bedrifter og må ta hensyn til muligheten for at c_2 er høy eller lav

Starter med å løse for bedrift 2s responsfunksjon (beste tilpasning til bedrift 1s valg).

<u>Bedrift 2s tilpasning</u>

a) Høye kostnader; $C_2(q_2) = c_2^H q_2$

$$\max \pi_2(q_2) = [a - q_1 - q_2 - c_2^H] q_2$$

<u>FOB</u>

$$q_2: \quad a - q_1 - c_2^H - 2q_2 = 0$$

$$2q_2 = a - q_1 - c_2^H$$

$$q_2^H = \frac{a - q_1 - c_2^H}{2} \qquad (1)$$

(1) gir 2s BR. når han har høye kostnader.

b) lave kostnader: $C_2(q_2) = C_2^L q_2$

$$\max \pi_2(q_2) = [a - q_1 - q_2 - C_2^L] q_2$$

FOB

$$q_2^L = \frac{a - q_1 - C_2^L}{2} \quad (2)$$

(2) gir 2s BR når han har høye kostnader.

Skal nå finne bedrift 1s beste tilpasningsfunksjon:

Bedrift 1s tilpasning
Kjenner kun sanns. for hvilken kostnad 2 møter.

Forventer $C_2(q_2) = C_2^H q_2$ med sanns. θ, og dermed q_2^H med sanns. θ.
Tilsvarende forventes $C_2(q_2) = C_2^L q_2$ og $q_2 = q_2^L$ med sanns. $(1-\theta)$.

Bedr. 1 finner sin beste tilpasning ved å løse:

$$\max_{q_1} \pi_1(q_1) = \theta[a - c_1 - q_1 - q_2^H]q_1 +$$

$$(1-\theta)[a - c_1 - q_1 - q_2^L]q_1$$

<u>FOB</u>

$$q_1: \ \theta[a - c - 2q_1 - q_2^H] + (1-\theta)[a - c - q_2^L - 2q_1] = 0$$

$$\theta[a - c - q_2^H] - \theta 2q_1 + (1-\theta)[a - c - q_2^L] - 2(1-\theta)q_1 = 0$$

$$2q_1 = \theta[a - c - q_2^H] + (1-\theta)[a - c - q_2^L]$$

$$\underline{q_1 = \frac{1}{2}\left[\theta[a - c - q_2^H] + (1-\theta)[a - c - q_2^L]\right]} \quad (3)$$

(3) gir bedrift 1s beste respons, gitt forventningene rundt q_2.

For å finne q_1's optimale tilpasning, setter vi inn for (1) og (2) i (3):

$$q_1 = \frac{1}{2}\left[\theta\left[a - c_1 - \left(\frac{a - q_1 - c_2^H}{2}\right)\right] + (1-\theta)\left[a - c_1 - \left(\frac{a - q_1 - c_2^L}{2}\right)\right]\right]$$

$| \cdot 4$

$$4q_1 = 2\theta a - 2\theta c_1 - \theta a + \theta q_1 + \theta c_2^H + 2(1-\theta)a -$$

$$2(1-\theta)c - (1-\theta)a + (1-\theta)q_1 + (1-\theta)c_2^L$$

$$4q_1 = 2\theta a - \theta a + 2a - 2\theta a - a + \theta a - 2\theta c_1$$

$$- 2c_1 + 2\theta c_1 + \theta q_1 + q_1 - \theta q_1 + \theta c_2^H + (1-\theta)c_2^L$$

$$4q_1 = a - 2c_1 + q_1 + \theta c_2^H + (1-\theta)c_2^L$$

$$3q_1 = a - 2c_1 + \theta c_2^H + (1-\theta)c_2^L$$

$$\underline{q_1 = \tfrac{1}{3}[a - 2c_1 + \theta c_2^H + (1-\theta)c_2^L]} \quad (4)$$

(4) gir q_1's optimale tilpasning.
Finner videre bedrift 2s tilpasning ved å sette inn (4) i (1) og (2).

Ved høye kostnader, vil 2 tilpasse seg ved:

$$q_2^H = \tfrac{1}{2}[a - c_2^H - [\tfrac{1}{3}[a - 2c_1 + \theta c_2^H + (1-\theta)c_2^L]]] \quad | \cdot 6$$

$$6q_2^H = 3a - 3c_2^H - a + 2c_1 - \theta c_2^H - (1-\theta)c_2^L$$

$$6q_2^H = 2a + 2c_1 - 3c_2^H - \theta c_2^H - (1-\theta)c_2^L$$

Ser nærmere på: $-(3+\theta)$
$-(3+1-1+\theta)$
$-(4-(1-\theta))$

$$6q_2^H = 2a + 2c_1 - 4c_2^H + (1-\theta)c_2^H - (1-\theta)c_2^L$$

$$6q_2^H = 2(a + c_1 - 2c_2^H) + (1-\theta)(c_2^H - c_2^L)$$

$$q_2^H = \frac{1}{3}(a + c_1 - 2c_2^H) + \frac{(1-\theta)}{6}(c_2^H - c_2^L) \quad (5).$$

Ved lave kostnader vil 2 tilpasse seg ved:

$$q_2^L = \frac{1}{2}\left[a - c_2^L - \frac{1}{3}\left[a - 2c_1 + \theta c_2^H + (1-\theta)c_2^L\right]\right] \quad | \cdot 6$$

$$6q_2^L = 3a - 3c_2^L - a + 2c_1 - \theta c_2^H - (1-\theta)c_2^L$$

$$6q_2^L = 2a + 2c_1 - 3c_2^L - c_2^L - \theta c_2^H + \theta c_2^L$$

$$6q_2^L = 2a + 2c_1 - 4c_2^L - \theta(c_2^H - c_2^L)$$

$$q_2^L = \frac{1}{3}(a + c_1 - 2c_2^L) - \frac{\theta}{6}(c_2^H - c_2^L) \quad (6.)$$

Nash-likevekten gis av (4), (5) og (6). Hvilken av (5) og (6) som blir produsert avhenger av kostnadene 2 møter. Disse er det kun bedrift 2 som "ser", slik at 1 alltid vil produsere q_1, dersom sannsynligheten, θ, er uendret. Vi får følgende q_i^* som gir likevekt:

$$(4) \quad q_1^* = \frac{1}{3}\left[a - 2c_1 + \theta c_2^H + (1-\theta)c_2^L\right]$$

$$(5) \quad q_2^{*H} = \frac{1}{3}\left[a + c_1 - 2c_2^H\right] + \frac{(1-\theta)}{6}(c_2^H - c_2^L)$$

$$(6) \quad q_2^{*L} = \frac{1}{3}\left[a + c_1 - 2c_2^L\right] \div \frac{\theta}{6}(c_2^H - c_2^L)$$

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

c) Fra b) fant vi at (4) - (6) løste spillet. Skal nå se hva som skjer ved:

i) endring i θ.

- Har antatt at $0 < \theta < 1$, dvs. at 1 har vært usikker rundt 2s kostnad.
Hva hvis vi har sikkerhet:
a) $\theta = 1$: 1 vet at 2s kostnad er C_2^H.

$$q_1^* = \frac{1}{3}[a - 2C_1 + 1C_2^H + (1-1)C_2^L]$$

$$\underline{q_1^* = \frac{1}{3}[a - 2C_1 + C_2^H]}$$

$$q_2^* = \frac{1}{3}[a + C_1 - 2C_2^H] + \frac{1-1}{6}(C_2^H + C_2^L)$$

$$\underline{q_2^{*H} = \frac{1}{3}[a + C_1 - 2C_2^H]} \left(= q_1^{*L} \text{ ved } \theta = 0\right)$$

Ser her at $q_1^* = q_1^c$, $q_2^* = q_2^c$.
Der vi i a) fant at cournot likevekten er gitt ved:

$$q_i = \frac{a-c}{n+1} = \frac{a-c}{3} \text{ (i dette tilfellet)}$$

(Like kostnader, ser nærmere på dette i neste pkt).

Dersom vi sammenlikner utfallene, ser vi:

$$q_2^{*H,Asym} > q_2^{*H,Cournot}$$

Dette er fordi dersom bedr. 1 ikke vet hvilken kostnad 2 møter, vil han tilpasse seg ved gjennomsnittet, dvs. produsere q_1 etter hva han forventer om q_2. Dersom q_2 faktisk møter c_2^H, vil han kunne prod. mer enn dersom 1 visste at bedrift 2 var en høykostnadsbedrift, da bedrift 1 (ved usikkerhet) tar høyde for at 2 kan være en lavkostnadsbedrift, og prod. rel. mindre enn han ville gjort dersom han visste at 2 var høykostn, og prod. mindre.

b) $\theta = 0$: 1 vet at 2 møter c_2^L

$$q_1^* = \frac{1}{3}(a - 2c_1 + c_2^L)$$

$$q_2^{*L} = \frac{1}{3}(a + c_1 - 2c_2^L)$$

Også her har vi at prod. kvantum er ulike ved usikkerhet vs. sikkerhet:

$$q_2^{*L,asym} < q_2^{*L\ Cournot}$$

Dette er fordi at dersom 1 ikke vet at 2 er lavkostnad og kan prod. mer til lavere kostnad, vil 1 produsere utifra forventet prod. Han forventer en lavere prod enn $q_2^{*L\ cournot}$, da 2 også, så vidt 1 vet, kan være høykostnad.

- θ nær 1, men $\theta \neq 1$.
  Bedr 1 forventer at bedrift 2 møter høye kostnader heller enn lave, q_1^* øker.

- θ nær 0, men $\theta \neq 0$
  Bedr. 1 forventer q_2^L og produserer mindre for at han ikke skal presse ned prisen for mye og tape profitt.

  (merknad: fra $P(Q) = a - q$ ser vi at prisen pr. enhet faller med tot. prod. Fra π vet vi at dette kan redusere inntekten dersom ~~prisen~~ pristallet reduserer verdien av solgte enheter mer enn den øker inntekten ska. økt prod).

ii) endring i c

- $c_1 = c_2^H = c_2^L$ (sikkerhet og like kostnader)

  $q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3}$ (cournot-likevekt med sym. info).

- Jo høyere c_1, jo lavere q_1^*, og jo mer rom for q_2^* (både for c_2^H og c_2^L)

- Jo høyere C_2 relativt til C_1*, jo mer rom for q_1, gitt at Bedrift 1 vet at han har relativt lavere kostnad enn bedrift 2, selv om 2 møter C_2^H eller C_2^L.

*evt. lavere C_1 rel. til C_2.

Oppgave 2)

- En prinsipal som tilbyr en kontrakt til en Agent.
- uttall: $X_1 = 25\,000$
  $X_2 = 50\,000$
- uttallet avhenger av Agentens innsats, e, og tilfeldigheter.

$P_{X_1 = 25\,000}(e_1) = 0.25$

$P_{X_2} = 50\,000\ (e_1) = 0.75$

$P_{X_1} = 25000\ (e_2) = 0.50$

$P_{X_2} = 50\,000\ (e_2) = 0.50$

$P_{X_1} = 25\,000\ (e_3) = 0.75$

$P_{X_2} = 50000\ (e_3) = 0.25$

- Av dette velger jeg å anta sannsynligheten for et godt resultat (50 000) avhenger av e, og er høyere jo større innsatsen er.

$\Rightarrow$ e_1 er agentens høyeste innsats
e_2 er den mellomste
e_3 er den laveste

- P er risikonøytral: $B(X, W) = X - W$
  A er risikoavers: $u(w, e) = \sqrt{W} - V(e)$

der: $V(e_1) = 40$, $V(e_2) = 20$, $V(e_3) = 5$

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

- reservasjonsnytte : $\bar{U} = 120$
  ↳ nytten ved å jobbe andre steder / ikke arbeide.

En risikonøytral prinsipal betyr at P har lik nytte til alle resultat. Vi skriver :

$B'x > 0 \; , \; B''x = 0$

En risikoavers agent betyr at A ønsker en sikker betaling. A skyr risiko, dvs. at han ikke ønsker å ha en lønn som avhenger av resultatet. Vi skriver

$U'w > 0 \; , \; U''w < 0.$

A får høyere ~~lø~~ nytte ved økt lønn, men lavere nytte når han yter innsats:

$V'(e) > 0 \; , \; V''(e) > 0$

Jo høyere innsats, jo mindre nytte (større disutility har A).

Starter med å introdusere spillet vha. en tidslinje:

1. Prinsipalen designer en kontrakt som han tilbyr Agenten.
2. Agenten godtar eller avslår kontrakten.

3. Dersom A godtar og signerer, tilbyr A en innsats, e. Dette kan være observerbart og verifiserbart for P, men ikke nødvendigvis.
4. Naturen spiller inn.
5. Payoff og utfall (avh. av 3. og 4).

a) Symmetrisk informasjon

P og A har lik info. P kan verifisere As innsats. Dvs. at dersom A ikke tilbyr den e som P ønsker, vil P se dette, og kreve at A straffes for brudd på kontrakten.

P bestemmer både lønn og innsatsnivå. Hvordan, gis av bakoverinduksjon:

3. I dette tilfellet vet P hvilken innsats A yter. A gjør som han får beskjed om for å unngå straff.
2. A signerer kontrakten dersom forventet nytte overgår eller er lik som $\bar{U}$. Dette gir "participation condition", PC:

$$\sum P_i(e)\, u(w) - v(e) \geq \bar{U}$$

1. P tilbyr en kontrakt, gitt pkt 2.), som maksimerer hans profitt.

$$\max_{w_i, e} \sum P_i(e)\, B(x_i - w_i)$$

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

Løser først det generelle problemet for å vise tilpasningen, setter så inn for tall:

$$\max_{w_i} \sum P_i(e)(x_i - w_i)$$

$$\text{ubb. } \sum P_i(e)u(w) - v(e) \geq \bar{U}$$

Lagrange:

$$\mathcal{L} = \sum P_i(e)(x_i - w_i) + \lambda\left(\sum P_i(e)u(w) - v(e)\right)$$

FOB

i) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_i} = P_i(e)(-1) + \lambda P_i(e)u'(w_i) = 0$

$$\lambda u'(w_i) = 1$$

$$\lambda = \frac{1}{u'(w_i)} \quad (i^*)$$

Fra (i^*) ser vi at:

- $\lambda > 0 \Rightarrow$ PC binder (fra Kuhn-Tucker)
- $\frac{1}{u'(w_i)}$ er konstant for alle i (siden λ er konst.) siden $u' > 0$, $u'' < 0$ må vi ha at w_i er konstant for alle i:

$$w_i = w_0$$

$\Rightarrow$ lønnen gis av PC:

$$u(w) - v(e) = \bar{U}$$

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

$$u(w) = \bar{U} - V(e)$$

$$\underline{w = u^{-1}(\bar{U} - V(e))}$$

Ser at lønnen avhenger av innsatsen men ikke av resultatet.

ii) $\frac{\partial L}{\partial e} = (\sum P_i(e)X_i)' + \lambda(-V'(e)) = 0$

Setter $\sum P_i(e)X_i = \pi(e)$

$$\pi'(e) - \lambda V'(e) = 0$$

$$\underline{\pi'(e) = \frac{V'(e)}{u'(w)}} \quad (ii^*)$$

Ser at kontrakten er optimal. Til gitt lønn vil innsatsen gis der marginal økning i profitt for P er lik marginal red. i nytte for A (av en økning i innsatsen).
Det er ikke rom for forbedring.

Her nå at vi kan finne lønnen fra PC til de ulike e_i, $i = 1, 2, 3$, og komme fram til en optimal kontrakt. Antar at P etterspør:

° $\underline{e_1}$:

$$u(w, e) = \sqrt{w} - V(e) = \bar{U}$$

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

$$\sqrt{w} - 40 = 120$$
$$\sqrt{w} = 160$$
$$\underline{w = 25600}$$

- e_2: $\sqrt{w} = 120 + 20$
  $\underline{w = 19600}$

- e_3: $\sqrt{w} - 5 = 120$
  $\underline{w = 15625}$

De optimale kontraktene er:

- $(e_1, w_1) = (e_1, 25600)$
- $(e_2, w_2) = (e_2, 19600)$
- $\underline{(e_3, w_3) = (e_3, 15625)}$

P vil tilby den kontrakten som maksimerer profitten:

$$\pi = \sum P_i(e) x_i - \overset{\text{konstant.}}{w_0}$$

- e_1: $\pi(e_1) = 0.25 \cdot 25000 + 0.75 \cdot 50000 - 25600$
  $= 6250 + 37500 - 25600$
  $\underline{= 18150}$

- e_2: $\pi(e_2) = 0.5 \cdot 25000 + 0.5 \cdot 50000 - 19600$
  $= 12500 + 25000 - 19600$
  $\underline{= 17900}$

• e_3: $\pi(e_3) = 0.75 \cdot 25000 + 0.25 \cdot 50000 - 15625$

$$= 18750 + 12500 - 15625$$

$$= 31250 - 15625$$

$$= \underline{15625}$$

Ser at: $\pi(e_1) > \pi(e_2) > \pi(e_3)$

Prinsipalen vil foretrekke å tilby kontrakten:

$(e_1, W, \pi) = (e_1, 25600, 18150)$

Selv om det gir høyest lønn til A (kostnad for P) vil den også gi høyest forventet resultat og profitt.

Denne kolonnen er forbeholdt sensor
This column is for external examiner

b) Asymmetrisk informasjon.
P kan ikke lengre vite hvilken innsats A tilbyr, dvs. P kan ikke verifisere / bevise det dersom A sluntler unna avtalen. Benytter igjen baklengsinduksjon for å finne ut hvordan P best bør løse problemet.

3. A tilbyr den innsatsen som maksimerer hans nytte. Dersom A får en konstant lønn vil A tilby minimalt med innsats, da dette ikke endrer lønnen ($u(w)$), men minimerer $V(e)$. Til ethvert nivå på w, vil A tilby e ved hjelp av:

$$\max_e \quad \sum P_i(e) u(w_i) - V(e)$$

FOB

$$\sum P_i'(e) u(w_i) - V'(e) = 0.$$

(IC)

Denne kalles insentivrestriksjonen, og må være oppfylt for at P skal få ønsket e fra A.

2. A må fortsatt ha forventet nytte over eller lik $\bar{U}$ for å signere kontrakten. PC må tilfredsstilles:

$$\sum P_i(e) u(w_i) - V(e) \geq \underline{U}$$

NB! $\bar{U} = \underline{U}$ ...

3. P maksimerer sin forventede profitt, avhengig av innsatsen han ønsker og lønnen som tilhører.

$\max \sum P_i \, \omega(x_i - w_i)$

Hva er optimal kontrakt i tilfellet der P ikke kan observere A's innsats?

a) P ønsker $e^{min} = e_3$

P vet at A minimerer nyttereduksjonen av e ($v(e)$) og vil tilby $e^{min} = e_3$ dersom han ~~kan (ikke får noen konsekvenser). Til gitt lønn vil dette~~ får en gitt lønn. P forventer dette, og tilbyr $W_3 = 15\,625$ i dette tilfellet.

b) Hva hvis P ønsker en høyere innsats, dvs. e_3 eller e_2.
Vet at sannsynligheten for et godt resultat øker med innsatsen, slik at ~~dette er det er~~ P har intensiver til å etterspørre høy innsats. I dette tilfellet må P tilby en kontrakt slik at KC oppfylles, dvs. at P må gi et intensiv til at A tilbyr en høy innsats.

P må løse:

$$\max \sum P_i(e^H)(X_i - W_i)$$

ubb $\sum P_i(e^H)u(w_i) - v(e^H) \geq \underline{U}$

$$\sum P_i(e^H)u(w_i) - v(e^H) \geq \sum P_i(e^L)u(w_i) - v(e^L)$$

- Vet at vi har to mulige utfall:
  $x_1 = 25\,000$, gir W_1
  $x_2 = 50\,000$, gir W_2
- løser problemet slik at A kun kan velge mellom to innsatsfaktorer:
  (i) e_1 over e_2
  (ii.) e_2 over e_3

→ benytter videre et spesialtilfelle av problemet:

i) $\max \sum_{i=1}^{2} P_i(e_1)(X_i - W_i)$

ubb. $0.25 \cdot \sqrt{W_2} + 0.75 \cdot \sqrt{W_1} - 40 = 120$

$$0.25\sqrt{W_2} + 0.75\sqrt{W_1} - 40 = 0.5\sqrt{W_2} + 0.5\sqrt{W_1} - 20$$

→ antar at PC og ICC binder, da prinsipalen ønsker å betale minst mulig til A for å få jobben gjort. Har nå to ukjente i to likninger, ICC og PC. Løser for disse og finner kontrakten P må tilby for at A skal velge e_1 over e_2:

PC: $0.25\sqrt{W_2} + 0.75\sqrt{W_1} = 120 + 40 = 160$

ICC: $(0.25 - 0.5)\sqrt{W_2} + (0.75 - 0.5)\sqrt{W_1} = 40 - 20$

$$-0.25\sqrt{W_2} + 0.25\sqrt{W_1} = 20$$

$$0.25\sqrt{W_1} = 20 + 0.25\sqrt{W_2}$$

$$\sqrt{W_1} = 80 + \sqrt{W_2}$$

Setter inn i PC:

$$0.25\sqrt{W_2} + 0.75[80 + \sqrt{W_2}] = 160$$

$$0.25\sqrt{W_2} + 60 + 0.75\sqrt{W_2} = 160$$

$$\sqrt{W_2} = 160 - 60$$

$$\sqrt{W_2} = 100$$

$$\underline{W_2 = 10\,000}$$

Setter inn i W_1:

$$\sqrt{W_1} = 80 + 100 = 180$$

$$\underline{W_1 = 32\,400}$$

For at P skal få A til å velge e_1 over e_2, må han tilby:

$W_1 = 32\,400$
$W_2 = 10\,000$.

Dette gir følgende profitt:

$$\sum P_i(e)(X_i - W_i) = 0.25(25\,000 - 10\,000) + 0.75(50\,000 - 32\,400)$$
$$= 3750 + 13\,200$$
$$= \underline{16\,950}$$

(ii) For at A igjen skal velge e_1 over e_3, må vi ha at e_2 gir bedre profitt enn e_3:

$$\max \sum_{i=1}^{2} P_i(e_2)(X_i - W_i)$$

ubb. $0.5\sqrt{W_2} + 0.5\sqrt{W_1} - 20 = 0.75\sqrt{W_2} + 0.25\sqrt{W_1} - 5$

$0.5\sqrt{W_2} + 0.5\sqrt{W_1} - 20 = 120$

Finner $\sqrt{W_2}$ og $\sqrt{W_1}$ fra PC og ICC:

PC: $0.5\sqrt{W_2} + 0.5\sqrt{W_1} = 140$

ICC: $(0.5 - 0.75)\sqrt{W_2} + (0.5 - 0.25)\sqrt{W_1} = 20 - 5$

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

IC: $-0.25\sqrt{W_2} + 0.25\sqrt{W_1} = 15$

$$0.25\sqrt{W_1} = 15 + 0.25\sqrt{W_2}$$

$$\underline{\sqrt{W_1} = 60 + \sqrt{W_2}}$$

Setter inn i PC:

$$0.5\sqrt{W_2} + 0.5\sqrt{W_1} = 140$$

$$0.5\sqrt{W_2} + 0.5(60 + \sqrt{W_2}) = 140$$

$$0.5\sqrt{W_2} + 0.5\sqrt{W_2} = 140 - 60$$

$$\sqrt{W_2} = 80$$

$$\underline{W_2 = 6400}$$

Inn i $\sqrt{W_1} = 60 + \sqrt{W_2}$

$$\sqrt{W_1} = 60 + 80$$

$$\underline{W_1 = 19\,600}$$

For at P skal få A til å velge e_2 over e_3 må han tilby:

$W_1 = 19\,600$

$W_2 = 6400$

Dette gir følgende profitt:

$$\pi(e_2) = P_i(e)(x_i - w_i)$$
$$= 0.5(25000 - 6400) + 0.5(50000 - 19600)$$
$$= 9300 + 15200$$
$$\underline{= 24500}$$

Har nå funnet at P må tilby 3 ulike kontrakter ved ulike innsatsnivå. Dersom P ønsker:

- e_3: tilbyr $(e, w, \pi) = (e_3, 15625, 15625)$
- e_2: tilbyr $(e, w, \pi) = (e_2, w_1 = 19600, w_2 = 6400, 24500)$
- e_1: tilbyr $(e, w, \pi) = (e_1, w_1 = 32400, w_2 = 10000, 16950)$

I dette tilfellet vil P ønske å tilby den kontrakten som maksimerer profitten. Vi ser at:

$$\pi(e_2) > \pi(e_1) > \pi(e_3)$$

P vil tilby kontrakten til e_2, slik at A vil utføre en innsats lik e_2.

Sammenlikner symmetrisk kontrakt og kontrakten ved asymmetrisk info:

- $e = e_2$:

Sym:
$(e, W, \pi) = (e_2, 19600, 17900)$

Asym:
$(e, W, \pi) = (e_2, W_1 = 19600, W_2 = 6400, 24500)$

Ser at P betaler to lønninger, et for de ulike resultatene, i tilfellet med HH. Dette er for å gi A et insentiv til å tilby e^2 istedenfor e^3

~~Ser at W_2^{HH} (lønn ved x_2) er større = W^{sym}.~~
~~Dette er fordi x_2 har lite sanns. for å inntreffe ved e_3, mens $W_1^{HH} < W^{sym}$~~
~~Her vil A tape på å tilby e_3~~

Ser at: $W_2^{HH} = W^{sym}$
$W_1^{HH} < W^{sym}$

Her vil A komme dårligere ut ved et dårlig resultat, da dette indikerer at han skulker. W_2^{H} er ikke større enn W^{sym}, da sanns. for at e_2 gir x_1 og x_2 er lik.

- $\underline{e = e_1}$:

Sym:
$(e, w, \pi) = (e_1, 25600, 18150)$

HH:
$(e, w, \pi) = (e_1, w_1 = 32400, w_2 = 10000, 16950)$

Ser at:
$w_1^{HH} > w^{sym}$
$w_2^{HH} < w^{sym}$

Dette er for å gi et insentiv til at A skal øke innsatsen. Vet at $P_{x_2}(e_1) > P_{x_1}(e_1)$, slik at ~~høy fr~~ et godt resultat, x_2, gir en indikasjon på A har brukt høy innsats, noe som må belønnes med høyere lønn, da P ønsker e_1.
x_1 vil derimot være en indikasjon på at A ikke har tilbudt høy innsats. P straffer A med lavere lønn.

Generelt har vi at jo større $P_{x_2}(e_1)$ rel. til $P_{x_1}(e_1)$, jo høyere lønn vil A få fra P, da P sterkt ønsker at A skal tilby e_1 og gi res. x_2. (kan vises vha. et generelt eks., men rekker ikke dette nå).

NTNU

Kandidat nr./Candidate no. 10014

Dato/Date: 31/5-11 Side/Page: 29.

Emnekode/Subject SØK 3005 Antall ark/Number of pages: 30

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Ser at:

$\pi^{HH} < \pi^{sym}$: P taper på å ikke vite hvilken type A er.

Dette er en generell teori i informasjonsteori, at aktøren med mest info. kommer bedre ut.

P taper på at han må betale A en høyere lønn for at A skal tilby e_1.

Merk: kan (og bør kanskje) sammenlikne e_3 mot e_1, men jeg antar at dersom e_2 er bedre enn e_3 ved kontrakten, vil det holde at ~~e_3~~ e_1 er bedre enn e_2, da kanner ikke. da jeg ikke rekker å vise det siste.

Dog øker $V(e)$, så det kan være lurt å se hva som kreves for at A skal tilby e_3, ikke e_1.

NTNU

Kandidat nr./*Candidate no.* 10014

Dato/*Date:* 31/5-11 Side/*Page:* 30.

Emnekode/*Subject* SØK 3005. Antall ark/*Number of pages:* 30

Denne kolonnen er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

c) A har forhandlingskraft:

A kan påvirke resultatet av kontrakten. Dette kan A ha dersom nytte avhenger av resultatet. A kan f.eks kreve en ytterligere lønnsøkning ved $X_2 > X_1$, da A vet at dette vil påvirke/øke Ps nytte/profitt.

Vi kan f.eks skrive at:

$$\bar{U} = 120 + \underbrace{\theta(X_2 - X_1)}_{}$$

A krever en ekstra fortjeneste dersom utfallet er godt enn dersom det er dårlig. Antar $0 < \theta < 1$

Dette vil øke lønnen ved X_2. Da vil muligens Ps profitt falle ved X_2, og P vil heller etterspørre X_1. Flaks for A som slipper unna med mindre innsats.

* e_1 over e_3:

PC: $0.25\pi w_1 + 0.75\pi w_2 = 160$

ICC: $(0.25 - 0.75)\pi w_1 + (0.75 - 0.25)\pi w_2 = 40 - 5$

$$-\pi w_1 + \pi w_2 = 70$$