OPPG. 1

En agent (A) skal utføre en jobb for prinsipalen (P). P kan observere A's innsats (e) og ønsker å utforme en kontrakt som maksimerer profitten, og som A godtar.

Siden e er observerbar kan P spesifisere ønsket e i kontrakten, og eventuelt brudd på dette kan føre til rettsak, noe som gjør at A vil yte ønsket e dersom han/hun godtar kontrakten.

Vi ser for oss at gangen i spillet er som følger:

P utformer kontrakten → A godtar eller avslår → A yter innsatsen e → "Naturen" spiller sitt stokastiske trekk → Resultatet avsløres og gevinsten deles (profitt til P, nytte til A)

X_i er resultatet av jobben, og ~~dette~~ avhenger av A's innsats, i tillegg til stokastiske, eller tilfeldige trekk som avgjøres av "naturen", eller andre faktorer som er utenfor A og Ps kontroll. For eksempel vil været eller annet kunne påvirke resultatet, ~~Definer~~ hvis vi ser på produksjon i jordbruket. Så en høy innsats tilsier at det er større sannsynlighet for at resultatet blir bra, selv om det ikke er 100% sikkert.

$X_i = X_1, X_2, \dots, X_n$, hvor X_n er høyest, X_1 er lavest.

Definer sannsynligheten for at resultatet blir X_i, som:

$p_i(e)$, denne avhenger av innsatsen. $\sum_{i=1}^{n} p_i(e) = 1$ for gitt innsats.

Prinsipalens nyttefunksjon:

$B(X_i - W(X_i))$ — $B'(\cdot) > 0$, altså er nytten til prinsipalen økende i resultatet, denne ønsker størst mulig $X_i - W(X_i)$

— $B''(\cdot) \leq 0$

Nytten avtar i lønna, $W(X_i)$, som (foreløpig) antas å være avhengig av resultatet.

Agentens nyttefunksjon

$U = u(W(X_i)) - v(e)$, $u'(w) > 0$, $v'(e) > 0$, $u'' \leq 0$, $v'' > 0$

$u(W(X_i))$ er nytten av inntekten, mens $v(e)$ er kostnaden for agenten ved å yte innsatsen e. Denne antas å være stigende i e, i tiltakende grad.

Kandidat nr. / Candidate no. 10043

Dato / Date 8/6-18 Side / Page 2

Emnekode / Subject: SØK 3005

Antall ark / Number of pages: 17

Denne kolonne er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Formen på u (additiv / separabel) forteller oss at A's risikoaversjon kun avhenger av inntekten, noe som forenkler denne analysen.

Har nå antatt generelle former på nyttefunksjonene, og skal diskutere P's valg av kontrakt på ~~grunnlag~~ generelt grunnlag før jeg går inn på ~~den~~ konsekvensene for kontrakten der ulike former på nyttefunksjonene.

UTFORMING AV KONTRAKTEN

Prinsipalen skal utforme en kontrakt $(e, \{W(X_i)\}_{i=1,\dots,n})$, som maksimerer hennes forventede nytte. Samtidig må hun ta hensyn til at A skal ønske å godta kontrakten. Forutsetningen for dette er at den såkalte deltakerbetingelsen må være oppfylt. Denne (DB) er gitt ved:

$$E[u(W(X_i))] - v(e) \geq \underline{U}$$

, $\underline{U}$ er A's reservasjonsnytte, altså nytten ved å gjøre noe annet enn å inngå denne kontrakten. Eks: Nytten ved en annen jobb, nytten ved arbeidsledighetstrygd etc.

P utformer altså en optimal kontrakt $(e^0, W^0(X_i))$, som oppfyller optimeringsproblemet:

$$\max_{(e, \{W(X_i)\}_{i=1,\dots,n})} \sum_{i=1}^{n} p_i(e) B(X_i - W(X_i)) \quad \text{u.b.b.}$$

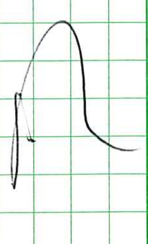
$$\sum_{i=1}^{n} p_i(e) u(W(X_i)) - v(e) \geq \underline{U}$$

Merk: Inntekten er uavhengig av resultatet, så kun nytten av lønn som avhenger av $p_i(e)$

Vi bruker Lagrange-funksjonen for å si noe om optimal kontrakt:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} p_i(e^0) B(X_i - W^0(X_i)) + \lambda^0 \left(\sum_{i=1}^{n} p_i(e^0) u(W^0(X_i)) - v(e^0) - \underline{U} \right)$$

Egenskaper ved optimal lønnskontrakt finner vi ved å derivere $\mathcal{L}$ mhp. $W(X_i)$ og sette lik 0 (F.O.B.)



$$(1) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W(X_i)} = -p_i(e^0) B'(X_i - W^0(X_i)) + \lambda^0 p_i(e^0) u'(W^0(X_i)) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^0 = \frac{B'(X_i - W^0(X_i))}{u'(W^0(X_i))} = \text{konstant} > 0$$

NTNU

Kandidat nr. / *Candidate no.* 10043

Dato / *Date* 8/6-18   Side / *Page* 3

Emnekode / *Subject:* SØK 3005   Antall ark / *Number of pages:* 17

Denne kolonne er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Fra (1) ser vi at optimal lønn settes slik at forholdet mellom grensenytten til P og A skal være konstant.

Vi får også at $\lambda^0 > 0$ ($B' > 0$ og $u' > 0$), noe som tilsier at bibetingelsen holder med likhet, A vil motta den $w^0(X_i)$ som gir akkurat reservasjonsnytten. Dette gir mening, ettersom en høyere lønn gir lavere $B(X_i - w(X_i))$. P kan dermed redusere $w(X_i)$ (og dermed øke sin egen nytte) inntil A akkurat tilfredsstiller deltakerbetingelsen.

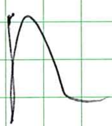
I optimum oppnår altså A $U = \sum p(e^0)u(w^0(X_i)) - v(e^0) = \underline{U}$

og effektivitetsbetingelsen $\lambda^0 = \frac{B'(X_i - w^0(X_i))}{u'(w^0(X_i))}$ er oppfylt.

Vi kan se et eksempel med to mulige utfall: $X_i = X_1, X_2$, $X_2 > X_1$:

Kan løse de to F.O.B. for λ^0 og sette $\lambda^0 = \lambda^0$:

$$\Rightarrow \frac{B'(X_1 - w^0(X_1))}{u'(w^0(X_1))} = \frac{B'(X_2 - w^0(X_2))}{u'(w^0(X_2))}$$



$$\Rightarrow \frac{u'(w^0(X_1))}{u'(w^0(X_2))} = \frac{B'(X_1 - w^0(X_1))}{u'(w^0(X_1))} \rightarrow \text{Effektivitetsbetingelsen}$$

<u>Ser videre på tre ulike scenarier:</u>

i) P er risikonøytral, A er risikoavers

ii) P er risikoavers, A er -nøytral

iii) Begge er risikoaverse

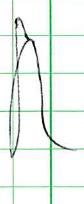
i) $B'' = 0$, $u'' < 0$

$\rightarrow$ Antar $B(X_i - w(X_i)) = X_i - w(X_i)$

I dette tilfellet ser vi at $\lambda^0 = \frac{B'(X_i - w(X_i))}{u'(w(X_i))} \Rightarrow u'(w(X_i)) = \frac{\lambda^0}{B'}$ = konstant

For at $w^0(X_i)$ skal være optimalt, må den sørge for at $u'(w^0(X_i))$ er konstant for alle X_i.

Siden $u''(w(X_i)) < 0$, så impliserer dette at $w^0(X_i) = w^0 \; \forall X_i$



P må "forsikre" A mot potensielle svingninger i resultatet ved å garantere A samme lønn uansett hva resultatet blir. Siden innsatsen er verifiserbar, så har ikke A noen mulighet til å avvike fra kontraktsfestet innsats, og fast lønn kan dermed være optimalt.

Husker at deltaker-betingelsen holder med likhet, derfor vil

$$u(W^0(X_i)) - v(e) = u(W^0) - v(e) = \underline{U} \quad \forall (X_i)$$

Optimal lønn er dermed gitt ved den inverse av $u(W^0)$:

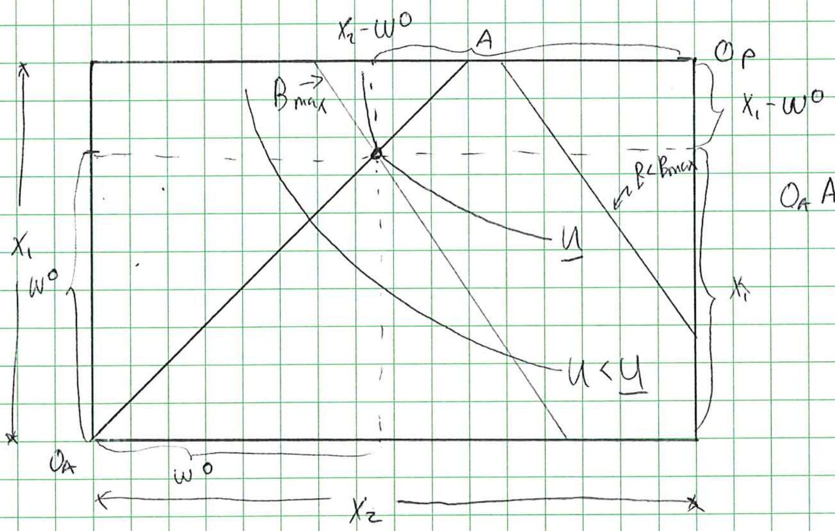
$$W^0 = u^{-1}(\underline{U} + v(e))$$

Optimal lønna avhenger av $\underline{U}$, større reservasjonsnytte fører til høyere W^0 for at DB skal holde. I tillegg er den avhengig av unytten/kostnaden knyttet til innsatsen e. Dersom denne blir større må lønna øke for at A skal godta kontrakten.

Kan se tilpasningen grafisk i et eksempel med to mulige resultat.

Hadde da at $\frac{u'(W^0(X_1))}{u'(W^0(X_2))} = \frac{B'(X_1 - W^0(X_1))}{B'(X_2 - W^0(X_2))} = 1$

$$\Rightarrow u'(W^0(X_1)) = u'(W^0(X_2))$$



$O_A A$ - linja der $W = W$ for begge $X_i = X_1, X_2$

Når P er risikonøytral (rette indiff.kurver som her), så vil tilpasningen bli som i pkt A. Her er $u'(W^0) = u'(W^0)$ uansett utfall, og B tar på seg hele risikoen ved svingninger i resultatet.

A mottar W^0 for begge utfall, mens P mottar $(X_1 - W^0)$ dersom $X = X_1$ og $(X_2 - W_0) > (X_1 - W^0)$ dersom $X = X_2$.

NTNU

Kandidat nr. / *Candidate no.* 10043

Dato / *Date* 8/6-18 Side / *Page* 5

Emnekode / *Subject:* SØK 3005 Antall ark / *Number of pages:* 17

Denne kolonne er forbeholdt sensor

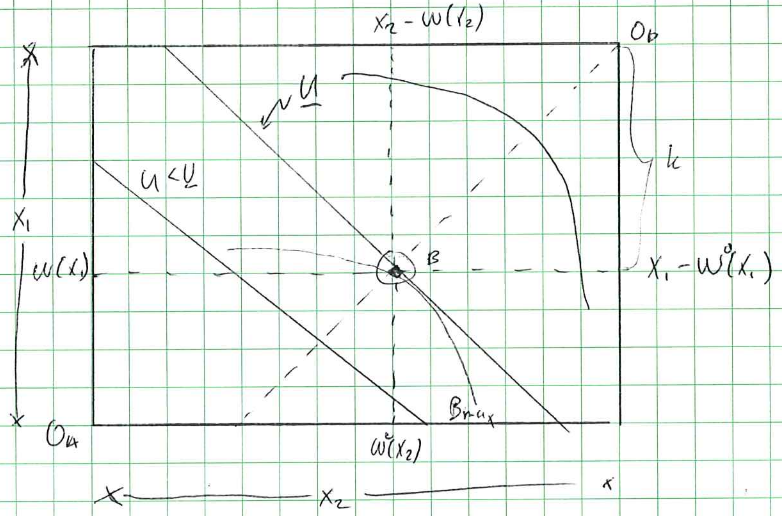
This column is for external examiner

ii) P er risikoavers, A er risikonøytral

Nå har vi at $B''(\cdot) < 0$, men $u'' = 0$

Dette blir "speilbildet" av tilfellet i (i). Nå er det A som vil påta seg all risikoen knyttet til forskjellige utfall, mens P vil motta et fast beløp uavhengig av verdien på X_i.

Grafisk ser dette slik ut:



Tilpasningen blir i B, hvor $u(w(X_i)) - v(e) = \underline{u}$

og $B'(X_1 - w(X_1)) = B'(X_2 - w(X_2))$

Når P er risikoavers og A er -nøytral er derfor optimal lønnskontrakt en som varierer med resultatet.

$$\lambda^0 = \frac{B'(X_i - W(X_i))}{u'(W(X_i))} \Rightarrow B'(X_i - W(X_i)) = \lambda^0 u' \rightarrow \text{konstant}$$

Dvs. at P skal motta samme beløp $(X_i - W(X_i))$ uansett hva X_i blir. Optimal lønn er gitt ved:

$w^0(X_i) = X_i - k$, hvor k er et fast beløp som trekkes fra resultatet.

(Denne typen kontrakt kan ses på som en såkalt "franchise"-kontrakt hvor A utfører oppgaven mot å sikre P en fastinntekt lik k uansett hva resultatet blir)

$$w^0(X_i) = X_i - k \Rightarrow B(X_i - w^0(X_i)) = B(X_i - X_i + k) = B(k) \;\forall X_i$$

$$\Rightarrow B'(k) = \text{konstant}.$$

Hvordan k bør beregnes ser vi ved å sette inn for $w(X_i)$ i DB: $(u(w(X_i))) = w(X_i) = X_i - k$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(e^0)[X_i - k] - v(e^0) = \underline{U} = \sum p_i(e^0)X_i - \overbrace{\sum p_i(e^0)}^{=1} k - v(e^0)$$

Løser denne for k:

$$k = \sum_{i=1}^{n} p_i(e^0)X_i - v(e^0) - \underline{U}$$

A

Ser altså at høyere forventet avkastning/gevinst ($\sum p_i X_i$) tilsier en større k, men jo større innsats kontrakten krever, jo mindre må k være for å kompensere A for denne ekstra "kostnaden". Dersom $\underline{U}$ øker må også k reduseres, ellers vil ikke A ønske å godta kontrakten.

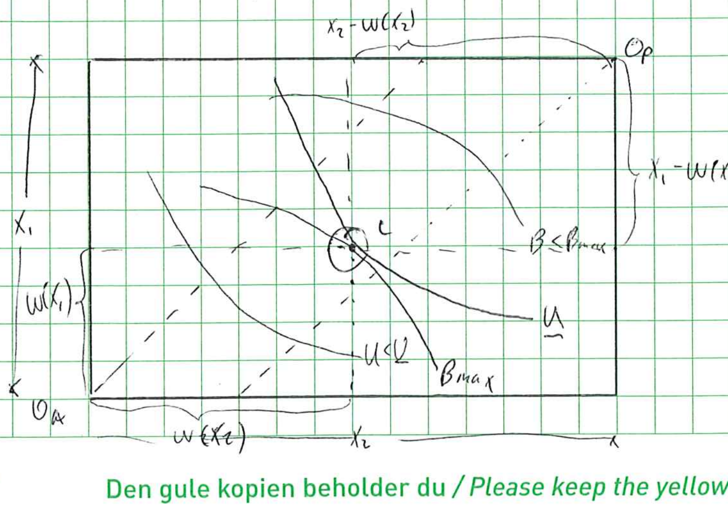
iii) Begge er risikoaverse, $B'' < 0$, $u'' < 0$

Vi har nå sett på eksempler hvor en av aktørene er risikonøytrale, noe som har resultert i at denne har fått på seg all risiko.

Dersom begge er risiko-averse vil vi få et litt annet resultat. ~~Det~~ Den optimale kontrakten vil, ikke overraskende, føre til at de deler risikoen mellom seg.

A blir nødt til å godta noe svingninger i lønn som følge av forskjellig X_i, men P må også godta noe endring i $(X_i - w(X_i))$. Skal nå vise at hvem som tar på seg mest av risikoen, avhenger av de respektive partnes risiko-aversjon.

Først ser vi på det grafiske eks: $X_i = X_1, X_2$:



$O_A A$, $O_P P$ - lik inntekt uavhengig av resultat

Kandidat nr. / Candidate no. 10043

Dato / Date 8/6-18 Side / Page 7

Emnekode / Subject: SØK3005 Antall ark / Number of pages: 17

Denne kolonne er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Viser at i dette tilfellet får vi en likevekt i pkt C. Her er $B(X_i + W(X_i))$ maksimert gitt $u(w(X_i)) - V(e) = \underline{u}$, og effektivitetsbetingelsen er oppfylt:

$$\frac{B'(X_1 - W(X_1))}{B'(X_2 - W(X_2))} = \frac{u'(W(X_1))}{u'(W(X_2))}$$

For å si noe mer generelt i et tilfelle med $X_i = X_1, X_2, \dots, X_n$ går vi tilbake til F.O.B. fra tidligere. Vi vet at optimal lønn må variere med resultatet X_i, men ikke på hvilken måte.

Husker at:

$$-p_i(e^0)B'(X_i - W^0(X_i)) + \lambda^0 p_i(e) u'(W^0(X_i)) = 0$$

$$\Rightarrow -B'(X_i - W^0(X_i)) + \lambda^0 \cancel{p_i(e)}\, u'(W^0(X_i)) = 0$$

Vi deriverer igjennom uttrykket mhp X_i:

$$-B''(X_i - W^0(X_i))\left[1 - \frac{dW^0(X_i)}{dX_i}\right] + \lambda^0 u''(W^0(X_i))\left[\frac{dW^0(X_i)}{dX_i}\right]$$

Setter inn for $\lambda^0 = \frac{B'(X_i - W^0(X_i))}{u'(W^0(X_i))}$ (forenkler til (B'', B', u'' og u')

$$\Rightarrow -B''\left(1 - \frac{dW^0(X_i)}{dX_i}\right) + \frac{B'}{u'} \cdot u''\left(\frac{d(W^0(X_i))}{dX_i}\right) = 0 \quad \Big| \frac{1}{B'}$$

$$-\frac{B''}{B'}\left(1 - \frac{dW^0(X_i)}{dX_i}\right) + \frac{u''}{u'}\left(\frac{dW^0(X_i)}{dX_i}\right) = 0$$

Definerer $-\frac{B''}{B'} = r_p$ og $-\frac{u''}{u'} = r_a$ som ~~[illegible]~~ absolutt risikoaversjon (vises i oppg. 3), og skriver om:

$$r_p\left(1 - \frac{dW^0(X_i)}{dX_i}\right) - r_a\left(\frac{dW^0(X_i)}{dX_i}\right) = 0$$

Vi er interessert i hva som skjer med optimal lønn ved endring i X_i og løser for $\frac{dW^0(X_i)}{dX_i}$:

$$\frac{dW^0(X_i)}{dX_i} = \frac{r_p}{r_p + r_a} > 0$$ (siden $B'' < 0$ og $u'' < 0 \Rightarrow r_p, r_a > 0$

Kandidat nr. / Candidate no. 10043

Dato / Date 8/6-18 Side / Page 8

Emnekode / Subject: SØK3005

Antall ark / Number of pages: 17

Denne kolonne er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Når resultatet øker ($X_i \uparrow$) skal altså den tilhørende lønna øke, $\frac{dW^0(X_i)}{dX_i} > 0$ i optimum. Hvor mye den øker avhenger av risikoaversjonen til A og P.

$r_p \uparrow$: $$\frac{d\frac{dW^0(X_i)}{dX_i}}{dr_p} = \frac{(r_p+r_a)-r_p}{(r_p+r_a)^2} = \frac{r_a}{(r_p+r_a)^2} > 0$$

Når P blir mer risikoavers tilsvarer dette en større reaksjon i lønna, A må ta mer av risikoen

$r_a \uparrow$: $$\frac{d\frac{dW^0(X_i)}{dX_i}}{dr_a} = -\frac{r_p}{(r_p+r_a)^2} < 0$$

Når A blir mer risikoavers skal utslaget i lønn bli mindre, slik at P tar på seg mer av risikoen.

Viser tydelig at punkt (i) og (ii) er spesialtilfeller av dette eksempelet:

i) $r_p = 0 \Rightarrow \frac{dW^0(X_i)}{dX_i} = 0$, endring i X_i påvirket ikke lønna

ii) $r_a = 0 \Rightarrow \frac{dW^0(X_i)}{dX_i} = 1$, vi fant en én til én endring i lønn ved endring i X_i.
~~$dX_i = 1$~~ ($dX_i = 1$) $\to d(X_i - k) = 1$

OPPSUMMERT:
Har nå funnet optimal lønnskontrakt i et Prinsipal-Agent-problem med symmetrisk informasjon. Videre vil P velge en optimal innsats, e^0, med tilhørende resonnement, men dette hopper jeg over, da oppgaven ikke spør etter det.

VENDT ARK ↓

Svanemerket trykksak fra Skipnes Kommunikasjon Lisensnr. 241 731

Den gule kopien beholder du / Please keep the yellow page

Mai 2018

Kandidat nr. / Candidate no. 10043

Dato / Date 8/6-18 Side / Page 9

Emnekode / Subject: SØK 3005 Antall ark / Number of pages: 17

Denne kolonne er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

OPPG. 2 - STACKLEBERG KONKURRANSE

Vi ser på tre bedrifter som produserer et homogent produkt. Det er mengdekonkurranse, hvor først bedrift 1 bestemmer sitt kvantum, deretter bestemmer 2 og 3 sine kvanta samtidig.

I dette spillet på normalform: $G = \{q_1, q_2, q_3\}$, hvor q_i, $i=1,2,3$ er alle mulige mengder (≥ 0) som bedrift i kan velge, dette er deres strategier. Gangen i spillet ~~går~~ som følger:

1) Bedr. 1 setter q_1

2) Bedr. 2 og 3 observerer q_1 og bestemmer hhv. q_2 og q_3 $\Rightarrow$ dette finner et kjennetegn ved Cournot-lik konkurranse, hvor begge disse bedr. tar q_1 for gitt.

3) Profitten til hver bedrift realiseres.

Dette spillet løses ved hjelp av baklengs induksjon, jeg ser først på hva som skjer i periode 2.

Profitten til bedrift i er gitt ved:

$\pi_i(q_i) = (P(Q) - c)q_i$, hvor $Q = q_1 + q_2 + q_3$, ~~prise~~ bedriftens pris påvirkes av totalt kvantum i markedet ($P(Q) = a - Q$)

c er bedriftens (identiske) marginalkostnader.

I periode 2:

2 og 3 maksimerer sin profitt, gitt den q_1 som ble bestemt i trinn 1. Disse vet dog ikke hva den andre vil velge, så de er nødt til å velge den q_i som er deres beste-respons på den andres mulige valg.

Dersom begge bedr. følger en slik strategi, så vil man likevel få en Nash-likevekt i spillet, hvor ingen av de to bedr. (2 og 3) kunne ha kommet bedre ut av det. Antar at det er full informasjon ang. de andre bedr. profittfunksjoner, kostn. etc., slik at de kan finne sine egne, og andres beste-respons.

Bedrift 2 vil sette q_2^*, slik at følgende maksimumsprobl. er løst:

$\max_{q_2 \geq 0} \pi_2(q_2) = (a - \bar{q}_1 - q_2 - q_3^* - c) q_2$, $\bar{q}_1$ - gitt fra periode 1, q_3^* - 3's beste respons

Førsteordensbet. for maksimum: $\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 0$

$$\Rightarrow (a - c - \bar{q}_1 - q_3^* - 2q_2) = 0$$

Løser for $q_2 \Rightarrow q_2^* = \dfrac{a - c - \bar{q}_1 - q_3^*}{2} = R_2(q_3^*)$

$R(q_3^*)$ er bedrift 2s "reaksjonsfunksjon".

På grunn av identiske bedrifter, så vil optimeringsproblemet for bedrift 3 være helt likt, og den får flg.:

$$q_3^* = R_3(q_2^*) = \frac{a - c - \bar{q}_1 - q_2^*}{2}$$

For å finne Nash-Likevekten $\{q_2^*(q_3^*), q_3^*(q_2^*)\}$

Setter vi inn for q_3^* i $R_2(q_3^*)$:

$$\Rightarrow q_2^* = \frac{1}{2}\left[(a-c) - \bar{q}_1 - \frac{1}{2}[a - c - \bar{q}_1 - q_2^*]\right]$$

$$= \frac{1}{2}(a - c - \bar{q}_1) - \frac{1}{4}[a - c - \bar{q}_1] + \frac{1}{4}q_2^*$$

$$q_2^* = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{4}[a - c - \bar{q}_1]\right] = \frac{a - c - \bar{q}_1}{3} = q_3^*$$

q_2^* og q_3^* vil altså bli like, og begge bedriftenes beslutning vil avhenge av 1s beslutning i første periode, som vi nå skal se på:

<u>Bedrift 1:</u> (B1)

B1 er klar over hvordan spillet vil utarte seg i neste periode, og vet at dette blir utfallet i et slikt spill. B1 kan derfor maksimere sin profitt, gitt at ~~R2(q)~~ $q_2^* = q_3^* = \dfrac{a - c - \bar{q}_1}{3}$

$$\Rightarrow Q = q_1 + q_2^* + q_3^* = q_1 + \frac{2}{3}[a - c - q_1] = \frac{2}{3}(a-c) + \frac{1}{3}q_1$$

~~$\Pi_1 = \left[\frac{(a-c)2}{3} + \frac{1}{3}q_1\right]q_1$~~ $\Pi_1(q_1) = [a - c - Q]\,q_1$

$$= \frac{a-c}{3}q_1 - \frac{1}{3}q_1^2$$

$\boxed{\text{F.O.B.}}$ $\dfrac{\partial \Pi_1(q_1)}{\partial q_1} = \dfrac{a-c}{3} - \dfrac{2}{3}q_1 = 0$

$$\Rightarrow q_1^* = \frac{a-c}{2}$$

R

Kan nå sette inn for q_1^* og finne produksjon i hver av bedriftene:

$$q_2^* = q_3^* = \frac{(a-c)}{3} - \frac{1}{3}\frac{(a-c)}{2} = \frac{(a-c)}{6} < q_1^*$$

Vi ~~har~~ har nå funnet Nash-likevekten $\{q_1^*, q_2^*, q_3^*\} = \left\{\frac{(a-c)}{2}, \frac{(a-c)}{6}, \frac{(a-c)}{6}\right\}$

Som er en delspillperfekt likevekt i dette spillet med sekvensielle beslutninger.

I likevekten er da:

IKKE SPURT

$$Q^* = \frac{(a-c)}{2} + \frac{2}{6}(a-c) = \frac{5}{6}(a-c) \text{ - total produksjon}$$

$$P(Q^*) = a - \frac{5}{6}(a-c) = \frac{a+5c}{6}$$

$$\Pi_1(q_1^*) = \left(\frac{a+5c}{6} - c\right)\frac{(a-c)}{2} = \frac{(a-c)}{6} \cdot \frac{(a-c)}{2} = \frac{(a-c)^2}{12}$$

$$\Pi_2(q_2^*) = \Pi_3(q_3^*) = \left(\frac{a-c}{6}\right) \cdot \left(\frac{a-c}{6}\right) = \frac{(a-c)^2}{36} < \Pi_1(q_1^*)$$

Vi ser altså at B1 har en høyere produksjon enn de to andre, og får en større profitt. Det lønner seg altså å få velge q_1 først.

OPPSUMMERT:

Nash-likevekten er $\{q_1^*, q_2^*, q_3^*\} = \left\{\frac{a-c}{2}, \frac{(a-c)}{6}, \frac{(a-c)}{6}\right\}$

Hvor produsert kvantum i hver bedrift er likevektsutfallet i dette spillet: $q_1^* = \frac{(a-c)}{2}$, $q_2^* = q_3^* = \frac{(a-c)}{6}$

Hadde alle bestemt mengden samtidig, ville vi ha fått samme q_i^* for alle i: ~~q~~ $q_i^* = \frac{(a-c)}{3}$, som hadde medført i større profitt for 2 og 3, men noe mindre for 1. ← Vanlig Cournot-konk.

BRA, MEN IKKE DISTINKSJON LIKEVEKT/RESULTAT

Kandidat nr. / Candidate no. 10043

Dato / Date 8/6-18 Side / Page 12

Emnekode / Subject: SØK 3005

Antall ark / Number of pages: 17

Denne kolonne er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

OPPG. 3

En aktør har nyttefunksjonen $u = w^2$, w er slutt formue i millioner kr. Står overfor lotteriet $\tilde{x}:(2,\frac{1}{2};2,\frac{1}{2})$, kan vinne 2 mill kr med 50% ssh og tape 2 mill kr med samme ssh. Startformuen er $w_0 = 4$ mill kr.

a) Risikopremien er det beløpet som en aktør er villig til å betale for å unngå å ta risiko. For en risikoavers aktør er det bedre å betale risikopremien (π), slik at man ~~får~~ mottar $w_0 - \pi$ med sikkerhet, heller enn å delta i lotteriet og motta $\tilde{x} + w_0$ med usikkerhet (eller, mer presist: π er det beløpet som gjør at en risikoavers agent er indifferent mellom å betale π og å delta i et lotteri), når $E\tilde{x} = 0$.

En risikonøytral ~~agent~~ aktør vil ikke betale noe, så lenge $E\tilde{x} = 0$, mens en risiko-søkende aktør ~~ha~~ vil ha en negativ risikopremie: Altså må vedkommende få betalt for å være villig til å avstå fra lotteriet. Den neg. av risikopremien kalles for sikkerhetsekvivalent, $e = -\pi$. Skal nå finne det ekdakte beløpet på π i dette tilfellet.

Som nevnt er π det beløpet som betales/mottas med sikkerhet, slik at forventet nytte av lotteriet er lik sikker nytte av $w_0 - \pi$:

$$Eu(w_0 + \tilde{x}) = u(w_0 - \pi)$$

Her: $u = w^2$, slik at vi kan løse dette for π:

$$E(w_0 + \tilde{x})^2 = (w_0 - \pi)^2$$

$$\frac{1}{2}(4-2)^2 + \frac{1}{2}(4+2)^2 = (4-\pi)^2$$

$$\frac{1}{2}(2)^2 + \frac{1}{2}(6)^2 = \frac{4}{2} + \frac{36}{2} = (4-\pi)^2$$

$$20 = (4-\pi)^2 \Rightarrow 4 - \pi = \sqrt{20}$$

$$\pi = 4 - \sqrt{20} \approx \underline{\underline{-0{,}472135}}$$

R

For denne aktøren og disse verdiene på w_0, $\tilde{x}$ og nyttefunksj er altså $\pi = -0{,}472135$, dvs at aktøren må motta sikkerhetsekvivalenten $e = -\pi = 0{,}472135$ for å avstå fra denne risikoen. Grunnen til at π er negativ, er at vi har å gjøre med en risikosøkende aktør, noe vi ser fra nyttefunksjonen.

Kandidat nr. / Candidate no. 10043

Dato / Date 8/6-18 Side / Page 14

Emnekode / Subject: SØK 3005 Antall ark / Number of pages: 17

Denne kolonne er forbeholdt sensor / This column is for external examiner

R

b) Hvis nyttefunksjonen er $U = W^4$ får vi følgende risikopremie: (Alt annet er som i forrige oppg.):

$$E(w+\tilde{x})^4 = (W-\Pi)^4$$

$$\frac{1}{2}(4-2)^4 + \frac{1}{2}(4+2)^4 = (4-\Pi)^4$$

$$\frac{1}{2}(2^4+6^4) = (4-\Pi)^4$$

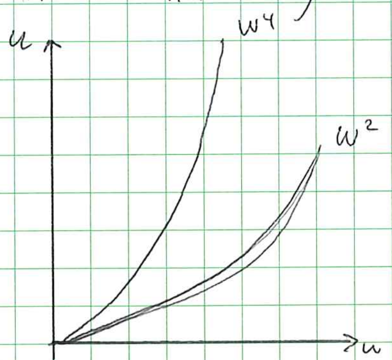
$$656 = (4-\Pi)^4 \Rightarrow \sqrt[4]{656} = (4-\Pi)$$

$$\Pi \approx 4 - 5.06087 \approx -1$$

Risikopremien $\Pi = -1$ er altså enda mer negativ enn i a). $e=1$, aktøren må kompenseres med ca. 1 million for å la være å delta i lotteriet. Dette er fordi den risikoaversjonen er enda lavere i dette tilfellet: $u' = 4w^3$, $u'' = 12w^2$

$$A(w) = -\frac{u''}{u'} = -\left[\frac{12W^2}{4W^3}\right] = -\frac{3}{W} < -\frac{1}{W}$$

Absolutt risikoaversjon er 3 ganger mindre enn når $u = w^2$.



Dette kan også sees grafisk. Når $u = w^4$ er gevinsten (nytteøkningen) ved å "vinne" i lotteriet enda større enn tapet ved dårlig utfall.

Alternativt kan dette sees ved å se på $u = W^4$ som en konveks transformasjon av $u = w^2$. Kaller $u = w^4$ for $V(w)$

$V(w)$ er en konveks transformasjon av $u(w)$, hvis den kan skrives som: $V(w) = \phi(u(w))$, hvor $\phi'(u) > 0$ og $\phi''(u) > 0$

Hvis dette er tilfellet, så vil $A_V(w) = -\frac{V''(w)}{V'(w)}$, som vi finner slik:

$$V'(w) = \phi'(u(w)) \cdot u'(w)$$

$$V''(w) = \phi''(u) \cdot u'(w)^2 + \phi'(u(w))\,u''(w)$$

$$\Rightarrow A_V(w) = -\left[\frac{\phi''(u)\,u'(w)^2}{\phi'(u(w))\,u'(w)} + \frac{\phi'(u(w))\,u''(w)}{\phi'(u(w))\,u'(w)}\right]$$

$$A_v(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} - \frac{\phi''(u)}{\phi'(u)\cdot u'(w)} = A_u(w) - \frac{\phi''(u)}{\phi'(u)u'(w)}$$

$\Leftrightarrow$ $A_v(w) < A_u(w)$, siden $\phi'' > 0$, $\phi'(u) >$, $u'(w) > 0$

Her: $v(w) = w^4 = (u(w))^2 = (w^2)^2$

$\Rightarrow \phi(u(w)) = (u(w))^2 \Rightarrow \phi'(u(w)) = 2(u(w)) > 0$

$\phi''(u(w)) = 2 > 0$

Altså: $u = w^4$ er en konveks transformasjon av $u = w^2$ $\cdot A_v < A_u$, derfor er risikopremien enda mer neg. for $u = w^4$. Dette blir enda tydeligere om vi bruker Arrow-Pratts formel for approksimering av risikopremien (ved liten risiko). Den skriver Π som:

$\Pi = \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot A(w)$, hvor σ^2 er variansen til lotteriet, altså en indikator på hvor stor risikoen er.

For $u = w^2$:

$\Pi_u = \frac{1}{2}\sigma^2 A_u(w)$

For $v = u^2 = w^4$

$\Pi_v = \frac{1}{2}\sigma^2 A_v(w)$

Fant at $A_v(w) < A_u(w) \Leftrightarrow \Pi_v < \Pi_u$

BRA, SKRIVER EN DEL

DET IKKE ER SPURT OM.

NTNU

Kandidat nr. / Candidate no. 10043

Dato / Date 8/6-18 Side / Page 16

Emnekode / Subject: SØK 3005 Antall ark / Number of pages: 17

Denne kolonne er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

OPPG. 4

To investorer har plassert penger i en bank, som banken investerer i et prosjekt. Vi ser på to perioder, og investeringen blir lønnsom først etter periode 2. Dersom prosjektet avbrytes før dette, så vil investeringen gå med tap.

Definerer følgende:

D – investorenes innskudd (før starten av periode 1) 2D = totale innskudd

R – avkastningen til hver investor dersom investeringen får stå til slutten av spillet, 2R er den totale avkastningen på ~~fra~~ prosjektet, 2R > 2D

r – avkastningen dersom prosjektet avsluttes før periode 2, 2r < 2D, prosjektet går med tap

Antar at $R > D > r > \frac{D}{2}$

I hver periode har investorene to valg: 1) La pengene stå 2) Ta ut pengene

Vi ser spillet i hver periode i følgende matriser:

PERIODE 1:

Inv. 1 \ Inv. 2	Ta ut	La stå
T.U	r, r	D, 2r−D
L.S	2r−D, D	Neste periode

(r, r) er utfallet dersom begge tar ut pengene i periode 1

(D, 2r−D), (2r−D, D) – er utfallet dersom én velger å ta ut, mens den andre lar pengene stå. Da vil den som tar ut, motta hele sitt innskudd, prosjektet avsluttes og den andre mottar det som blir tilovers, 2r − D < D

Dersom begge lar pengene stå, går vi videre til periode 2, som ser slik ut:

Inv. 1 \ Inv. 2	T.U	L.S
T.U	R, R	2R−D, D
L.S	D, 2R−D	R, R

Når investeringen får stå til periode 2, så blir verdien av prosjektet lik 2R

Dersom begge tar ut pengene da, så mottar de halvparten av verdien hver, → (R, R)

Dette blir også utfallet dersom begge lar pengene stå, for så å få beløpet delt likt mellom seg

NTNU

Kandidat nr. / Candidate no. 10043

Dato / Date 8/6-18 Side / Page 17

Emnekode / Subject: SØK 3005 Antall ark / Number of pages: 17

Denne kolonne er forbeholdt sensor

This column is for external examiner

Dersom bare én tar ut, så vil den andre kun få tilbake innskuddet, D, mens den andre får $2R-D > D$

Derfor har vi en Nash-likevekt i dominerende strategi:
(Taut, Taut) → (R, R)

Begge vil ta ut penger og motta R i andre periode. Dette blir altså ~~resultatet~~ utfallet i periode 2, vi kan derfor skrive om spillmatrisen til periode 1 slik:

PERIODE 1:

		Inv. 2 T.U	Inv. 2 L.S
Inv. 1	T.U	r, r	D, 2r-D
Inv. 1	L.S	2r-D, D	R, R

Vi ser tydelig at det beste for begge vil være å la pengene stå, for så å motta R i neste periode. Men - vil dette bli utfallet?

Vi ser at $R > r > 2r - D$

~~Derfor ka~~ Dersom investor 1 mistenker at 2 vil ta ut sine penger, så kommer hun bedre ut av det ved å ta ut sine penger og motta r. Derfor kan vi i et slikt tilfelle få den "dårlige" likevekten (T.U, T.U.) og pay-offene (r, r) til hver investor.

Siden de ikke kan ~~gå~~ samarbeide om å binde seg til å la pengene stå, så kan vi få en slik dårlig likevekt til tross for at begge ville vært tjent med å la pengene stå.

Hva som blir utfallet vil altså avhenge av hvorvidt hver investor tror at den andre vil ta ut sine penger i periode 1 eller ikke.

Dette er et svært forenklet eksempel, men resultatene kan også være gyldigere for mer komplekse situasjoner, og en slik modell kan være en forklaring på hvorfor vi kan få såkalte "bank runs". I tider med stor usikkerhet i finansmarkedene kan mange bli redd for at alle investorer vil trekke seg ut, og dermed velger alle å trekke seg ut, slik at alle kommer dårligere ut av det.

Bra 4)